



TITLE:

異方的超伝導薄膜における磁場誘起リエントラント超伝導転移(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

蜂矢, 真弘

CITATION:

蜂矢, 真弘. 異方的超伝導薄膜における磁場誘起リエントラント超伝導転移. 京都大学, 2014, 博士(理学)

ISSUE DATE:

2014-03-24

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k18059>

RIGHT:

博士論文

異方的超伝導薄膜における
磁場誘起リエントラント超伝導転移

蜂矢真弘

平成 26 年 1 月 22 日

目次

SUMMARY	iii
摘要	v
第 1 章 異方的超伝導及び FFLO 状態	1
1.1 異方的超伝導	1
1.2 FFLO 状態	2
1.3 1 粒子エネルギーのシフトに依る FFLO 状態	5
1.4 薄膜 FFLO 状態	6
1.4.1 薄膜 FFLO 状態に関する過去の研究	8
第 2 章 準古典理論の定式	10
2.1 温度 Green 関数	10
2.2 Gor'kov 方程式	11
2.2.1 singlet-pairing	13
2.2.2 triplet-pairing	15
2.3 Fourier 変換	16
2.4 一様で外部磁場のない singlet-pairing の超伝導体	18
2.5 準古典近似	19
2.6 準古典 Green 関数	21
2.6.1 準古典異常 Green 関数	22
2.6.2 準古典 Green 関数	22
2.6.3 準古典 Green 関数の行列表示	23
2.7 Eilenberger 方程式	24
2.8 Eilenberger 方程式の規格化条件	26
2.9 Riccati Formalism	28
2.10 Explosion Trick	31

2.11 Gauge Transformation	34
2.12 Ginzburg-Landau 方程式	35
第 3 章 計算結果と考察	38
3.1 GL 方程式に依る数値解析	38
3.2 Eilenberger 方程式に依る数値解析	40
3.2.1 t-d グラフ	40
3.2.2 t-B グラフ	45
3.2.3 リエントラント超伝導相	46
第 4 章 結論	50
4.1 薄膜 FFLO 状態	50
4.2 磁場誘起リエントラント現象	51
4.3 Assignments	51
謝辞	52
参考文献	53

SUMMARY

The conventional superconducting (SC) phase has a spatially uniform SC order parameter as a reflection of the Bose-Einstein condensation. In several situations, however, a SC ground state can have a spatial modulation in the SC order parameter. For example, when applying a magnetic field, the Pauli paramagnetic effect breaks continuous spatial translation symmetry: A spatially nonuniform state partially avoid the paramagnetic depairing, and, as a result, a periodic structure of the SC order parameter appears. Such a modulated SC state is regarded as one of the Fulde-Ferrell-Larkin-Ovchinnikov (FFLO) state. It is believed at present through extensive studies that the high field SC phase in the heavy fermion material CeCoIn₅ is the above-mentioned FFLO vortex state with a one-dimensional modulation parallel to the applied magnetic field.

It has been clarified recently in different contexts that a similar but different type of spatially modulated SC state becomes possible in the nodal *d*-wave superconductors if the quasiparticle dispersion $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ includes an additional term linear in \mathbf{k} of the type

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{k}, \quad (1)$$

where \mathbf{k} is the wavenumber, and \mathbf{V} is \mathbf{k} -independent. For example, in the case of the Rashba noncentrosymmetric superconductors (NCSs) in a magnetic field parallel to a gap node direction, the vector \mathbf{V} is proportional to the Zeeman energy and the spin-orbit coupling. Moreover, a spatially modulated SC state also can appear even in zero magnetic field in the case of thin films, where the vector \mathbf{V} is proportional to the inverse of the film thickness.

In the present work, Vorontsov has pointed out a tendency of formation of the modulated SC state in a SC film with D-wave pairing in zero field case [25]. There, a D-wave paired SC film sample is assumed to be obtained by cutting the bulk sample along the plane spanned by, for instance, the (1, 1, 0) and z directions ("D_{xy}-wave" configuration), and the specular

condition on the boundary surfaces is assumed. The main point is that a combination of this boundary condition and the D-wave pairing symmetry leads to a spatial modulation of the SC order parameter parallel to the film surface and a gap node direction. In contrast, if the boundary surface is parallel not to gap node directions but to an anti-node direction ("D_{x²y²}-wave" configuration), no stable modulated SC state appears, and just the uniform SC state is realized in zero field.

Then, it is natural to imagine whether this nontrivial mechanism on the formation of the modulated SC state in the "D_{xy}-wave" configuration is affected by applying an uniform magnetic field. Since, at least, the Zeeman effect on the conduction electrons breaks a spin-singlet pair, the modulated state in zero field would be suppressed with increasing the field. However, it is unclear whether, by increasing the field, this state gives way to the normal state or other SC states. In fact, the conventional FFLO state due to an isotropic population imbalance should be realized in high fields and at low temperatures.

In this manner, the resulting field-induced competition between the two different modulated states may lead to unusual field dependences of the phase diagram in intermediate fields. In particular, we encounter the situation in which the uniform SC state bounded by the normal state at both lower and higher fields is realized in intermediate fields. It is found that the origin of the reentry of the uniform SC state consists in the subtle but nonmonotonous thickness dependence of T_c in zero field. Possible field-temperature (T - B) phase diagrams of films of unconventional superconductors in the above-mentioned "D_{xy}-wave" configuration will be investigated in details.

摘要

BCS 理論に依ると、低温に於いてスピン $S_z = \frac{1}{2}$ ・波数 \mathbf{k} を持つ電子とスピン $S_z = -\frac{1}{2}$ ・波数 $-\mathbf{k}$ を持つ電子とが引力相互作用をする時、Cooper pair を形成し、金属は超伝導状態へと相転移する。一様な磁場下でのスピン一重項超伝導状態の安定性は反磁性効果と常磁性効果の 2 種類の対破壊効果の相乗効果として決定される。常磁性対破壊効果は一様磁場が電子の持つ磁気モーメントと結合することに依り、各スピン状態の電子の Fermi Surface が Zeeman 分裂すること起因している。この効果が顕著な状態では Fermi Surface のずれのため、通常の BCS 理論のように運動量 $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ の電子が Cooper pair を形成することはできない。しかし、運動量 $(\mathbf{k} + \mathbf{q}, -\mathbf{k} + \mathbf{q})$ の電子が Cooper pair を形成することで、部分的に対破壊を回避することができる。この結果、Cooper pair が有限の重心運動量を持つ状態の方が安定となり、この重心運動量は pair-potential の空間変調 (modulation) として現れる。

この空間変調した超伝導状態は、1964 年に P. Fulde と R. A. Ferrell が提唱した Fulde-Ferrell (FF) 状態 [1] と、1965 年に A. I. Larkin と Yu. N. Ovchinnikov が提唱した Larkin-Ovchinnikov (LO) 状態 [2] を併せて、FFLO 状態と呼ばれている。FFLO 状態が出現するには強磁場まで超伝導相が残る物質が必要となるため、長らくの間、理論が先行していた。しかし、重い電子系超伝導体である CeCoIn_5 [3, 5–11] や有機物超伝導体である $\kappa\text{-(BEDT-TTF)}_2\text{Cu(NCS)}_2$ [12–15] などの発見に伴い、実験面でも研究が進められ、FFLO 状態が明らかにされつつある。また、近年では研究の場は超伝導体の分野だけではなく、希薄原子ガス [20] や中性子星等 [21] の分野にも広がっている。

前述のように FFLO 状態の起源は Zeeman 効果に依る Fermi surface の分裂が一般的だが、最近では

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{k}, \quad (2)$$

で表されるような 1 粒子エネルギーのシフトが起源となって、FFLO 状態に似た空間変調した超伝導状態が出現すると考えられている。ここで、 \mathbf{k} は波数であり、 \mathbf{V} に波数依存性はないとする。例えば、磁場に依る 1 粒子エネルギーのシフト [22, 23] や、ゼロ磁場であっても外部電流に依る 1 粒子エネルギーのシフト [24] が起源となって、FFLO 状態に似た超伝導状態が出現しうる。

この他にもサイズ効果に依る 1 粒子エネルギーのシフトを起源とした FFLO 状態に似た超伝導状態が提唱されており、本論文ではこれについて取り扱う。以降では、Zeeman 効果に依る従来型 FFLO 状態と区別する為に、サイズ効果に依る FFLO 状態を薄膜 FFLO 状態と呼ぶことにする。

A. B. Vorontsov は準二次元 D 波超伝導体に於けるゼロ磁場での薄膜 FFLO 状態を提唱した。[25] これを基に K. Aoyama 等は準二次元 D 波超伝導体に於ける低磁場域の薄膜 FFLO 状態の研究を行った。[26] 私の研究ではこれらの仕事をさらに拡張し、磁場下の超伝導相図の膜厚依存性を徹底的に追求した。

以前の研究でゼロ磁場下であっても、準二次元非従来型 D 波超伝導体に於いては、二次元面をカットして薄膜に加工することで、ノード方向が膜に平行 (" D_{xy} 波" 状況) であれば、サイズ効果に依って膜方向に一次元周期構造を持つ薄膜 FFLO 状態が出現可能となり、より安定性の高い薄膜 FF 状態が出現することが解っている。言い換えると、ノード方向が膜に平行でない (" $D_{x^2y^2}$ 波" 状況) の場合、薄膜 FFLO 状態は出現せず、Uniform な超伝導状態になる。このことから、薄膜 FFLO 状態の出現メカニズムには膜面とノードの相対方向が密接に関係していることが解る。以下、簡単のために " D_{xy} 波" 状況 (" $D_{x^2y^2}$ 波" 状況) を単に " D_{xy} 波" (" $D_{x^2y^2}$ 波") と呼ぶことにする。

ここで、薄膜 FFLO 状態の出現メカニズムに磁場がどのような影響を及ぼすのかは自然な疑問となり、ここに着目したのが私の研究である。少なくとも、磁場を加えた結果、Zeeman 効果に依って薄膜 FFLO 状態は抑制されるはずである。しかし、薄膜 FF 状態が抑制された結果、Uniform な超伝導状態に転移するのか、それとも薄膜 LO 状態に転移するのかは明らかにされていない。従来型 FFLO 状態では LO 状態の方が安定であることから、薄膜 FFLO 状態に磁場を強くしていくことで安定性の逆転が起き、薄膜 FF 状態から薄膜 LO 状態 (或いは従来型 LO 状態) への転移が起きると期待される。一方、直接の転移が起きない場合は超伝導相がリエントラントに起きることが期待される。

K. Aoyama 等が採用した Ginzburg-Landau 自由エネルギーを導出して理論解析する方法を用いて、" D_{xy} 波" に於いて Uniform な超伝導状態から薄膜 FF 状態及び薄膜 LO 状態に転移する膜厚を各磁場・温度に於いて数値計算した。この結果、低磁場では薄膜 FF 状態の方が安定となるが、磁場を強くするにつれて安定性が逆転し、高磁場では薄膜 LO 状態の方が安定となることが判明した。

しかし、GL 方程式は近似式であるが故に低温高磁場に於いて破綻している可能性があり、安定性の逆転はこれに起因している恐れがある。このため、Eilenberger 方程式を用いて再評価を行うことにした。

Eilenberger 方程式による解析の結果、磁場の増加に伴う安定性の逆転は起きず、常に薄膜 FF 状態の方が安定ということが判明した。また、 $80\xi_0$ 程度の厚めの膜も薄膜 FF 状態が出現すると予測される。

薄膜 FF 状態と従来型 LO 状態の領域の繋がりを調べるため、数値計算に依って各膜厚に於ける温度-磁場相図を作成した。この結果、“ D_{xy} 波”の場合、従来型 LO 領域と薄膜 FF 領域は繋がっておらず、間に Uniform な超伝導領域を挟むことが判明した。さらに、条件次第では、従来型 LO 領域と薄膜 FF 領域との間には Uniform な超伝導領域だけでなく、常伝導領域も存在し、超伝導相がリエントラントに起きることも判明した。

以上のように、磁場に対して非等方的な薄膜 FF 状態と、等方的な従来型 LO 状態が競合することで、磁場誘起リエントラント現象が発生することが確認された。このことから、磁場以外を起源とする他の FFLO 状態、例えばマルチバンド効果や電流を起源とする FFLO 状態に於いても、同様の磁場誘起リエントラント現象が発生する可能性があり、今後の研究に期待が持たれる。

第1章 異方的超伝導及びFFLO状態

この章では異方的超伝導及びFFLO状態について述べる。

1.1 異方的超伝導

超伝導状態はスピン成分の状態によって $S = 0$ ($S_z = 0$) のスピン一重項 (singlet-pairing) と $S = 1$ ($S_z = +1, 0, -1$) のスピン三重項 (triplet-pairing) に分類される。さらに、これらは軌道成分の状態によってスピン一重項はS波 ($l = 0$)・D波 ($l = 2$)・G波 ($l = 4$) ...、スピン三重項はP波 ($l = 1$)・F波 ($l = 3$) ...と区別することができる。

S波はギャップ Δ に波数依存性がない (定数になっている) ため、ノードを持たない等方的な超伝導である。超伝導体の大半はこのS波超伝導であり、従来型超伝導と呼ばれている。一方、P波・D波...は Δ に波数依存性があるため、 $\Delta = 0$ となるノードを持った異方的な超伝導である。(Fig.1.1) これらの超伝導体は異方的 (非従来型) 超伝導と呼ばれ、従来型超伝導には見られない特徴を示すと期待されており、近年では盛んに研究が行われている。例えば、銅酸化物系超伝導体などはスピン一重項D波超伝導であり、スピン三重項P波超伝導の候補として、 Sr_2RuO_4 や UPt_3 などが以前から注目されてきた。また、超伝導ではないが、液体ヘリウム3はスピン三重項P波超流動であることが判明している。

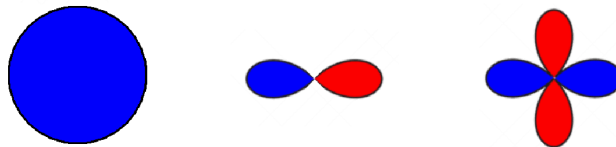


Fig. 1.1: 左から順にS波・P波・D波のギャップの開き方。青色は $\Delta > 0$ 、赤色は $\Delta < 0$ 。 $\Delta = 0$ となる節をノードと呼ぶ

1.2 FFLO 状態

BCS 理論に依ると、ゼロ磁場の場合、低温に於いてスピン $S_z = \frac{1}{2}$ ・波数 \mathbf{k} を持つ電子とスピン $S_z = -\frac{1}{2}$ ・波数 $-\mathbf{k}$ を持つ電子とが引力相互作用をする時、Cooper pair を形成し、金属は超伝導状態へと相転移する。この時、各スピン状態の電子の Fermi Surface は同じで、等方的になっている。(Fig.1.9)

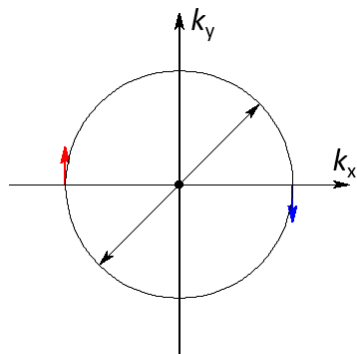


Fig. 1.2: Uniform 状態の Fermi Surface

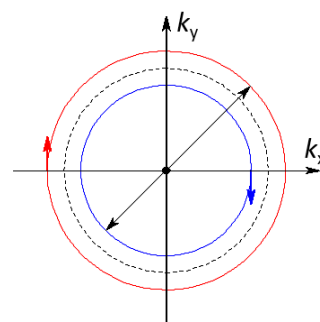


Fig. 1.3: FFLO 状態の Fermi Surface

一様な磁場下でのスピン一重項超伝導状態の安定性は反磁性効果と常磁性効果の2種類の対破壊効果の競合の結果として決定される。常磁性対破壊効果は一様磁場が電子の持つ磁気モーメントと結合することに依り、各スピン状態の電子の Fermi Surface が Zeeman 分裂すること起因している。この効果が顕著な状態では Fermi Surface のずれのため、通常の BCS 理論のように運動量 $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$ の電子が Cooper pair を形成することはできない。しかし、運動量 $(\mathbf{k} + \mathbf{q}, -\mathbf{k} + \mathbf{q})$ の電子が Cooper pair を形成することで、部分的に対破壊を回避することができる。(Fig.1.3)

この結果、Cooper pair が有限の重心運動量を持つ状態の方が安定となり、この重心運動量は pari-potential の空間変調 (modulation) として現れる。この空間変調した超伝導状態は、1964 年に P. Fulde と R. A. Ferrell が提唱した Fulde-Ferrell (FF) 状態 [1] と、1965 年に A. I. Larkin と Yu. N. Ovchinnikov が提唱した Larkin-Ovchinnikov (LO) 状態 [2] を併せて、FFLO 状態と呼ばれている。

FFLO 状態は有限の重心運動量を持つため、系や対形成の元々の異方性の影響を強く受け、磁場の方向に強く依存する。これは重心運動量を持たない BCS 状態とは対照的であり、FFLO 状態に特有の性質である。

FF 状態の pair-potential は、

$$\Delta_{\text{FF}}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) = \mathcal{Y}(\hat{\mathbf{p}})\Delta_0 \exp(i \mathbf{q} \cdot \mathbf{R}) \quad (1.1)$$

で記述され、位相が変調しており、(Fig.1.4) time-reversal symmetry が破れている。



Fig. 1.4: FF 状態

一方、LO 状態の pair-potential は、

$$\Delta_{\text{LO}}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) = \mathcal{Y}(\hat{\mathbf{p}})\Delta_0 \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}) \quad (1.2)$$

で記述され、振幅が変調しており、(Fig.1.5) time-reversal symmetry が破れている。

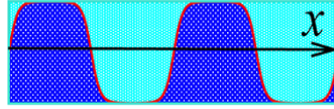


Fig. 1.5: LO 状態

FFLO 状態はスピン分極エネルギーと対凝縮エネルギーが拮抗している状態であるため、FFLO 状態が実現するには強磁場まで超伝導相が残る物質が必要となる。上部臨界磁場 H_{c2} の比較対象として、重心運動量を持たない BCS 状態へ転移する上部臨界磁場であるパウリ極限

$$\mu_B H_p \sim \frac{2\pi}{7} T_c \quad (1.3)$$

が挙げられる。高磁場側から磁場を変化させた時、FFLO 状態の H_{c2} が H_p より小さい場合、FFLO 状態へ転移する前に BCS 状態に転移してしまうからである。しかし、一般的な超伝導体は軌道磁性対破壊効果が強いいため、そのような強磁場まで超伝導状態は残らない。

上部臨界磁場を上げる方法として、不純物濃度を増やし、コヒーレンス長を短くすることで軌道磁性対破壊効果を抑制することが考えられる。しかし、FFLO 状態は重心運動量を持ち、実空間で規則正しく振動する状態であるため、不純物散乱によって容易に破壊されてしまい、上手く行かないことが判明している。[3]

他の方法として、超伝導体を薄膜状態にし、磁場の方向を伝導面に平行にすることで軌道磁性対破壊効果を抑制することが考えられる。しかし、この方法によって FFLO 状態を実現させるには、磁場方向の高精度制御が必要となる。また、表面散乱が FFLO 状態に不利に働く可能性もある。[4]

上記の理由により、FFLO 状態の研究は長らく理論が先行していたが、しかし、近年になって重い電子系超伝導体や有機物超伝導体が発見されたことで、状況が変化している。これらの超伝導体はバンド幅が狭いため、パウリ常磁性対破壊効果が強くなっており、クリーンかつ上部臨界磁場が高いという特徴がある。

現在は特に重い電子系超伝導体である CeCoIn_5 が注目を浴びている。この物質の強磁場下での超伝導相が FFLO 状態である可能性を報告したのは A. Bianchi ら [5,6] と H. A. Radovan [7] らである。上部臨界磁場での相転移は低温では一次転移となることが解っているが [8]、これはパウリ常磁性対破壊効果が強いことを示しており、FFLO 状態が出現しやすい状態である。その後も研究が続けられており、この物質の低温強磁場超伝導相が FFLO 状態であることを示唆する証拠が実験と理論の両面から見つかっている。[3,9–11] また、FFLO 状態と不整合スピン密度波 (SDW) 状がと共存していることが判明したりと、事象が複雑で未解明なことが多いため、盛んに研究がなされている。

有機物超伝導体としては $\kappa\text{-(BEDT-TTF)}_2\text{Cu(NCS)}_2$ の超伝導相内部に於いて、FFLO 状態に酷似した準二次元系の温度磁場相図が得られていたが [12,13]、その後の比熱と磁気トルクの実験で FFLO 状態であることを示唆する証拠が見つかっている [14,15]。この他にも $\lambda\text{-(BETS)}_2\text{GaCl}_4$ [16] や $(\text{TMTSF})_2\text{ClO}_4$ [17–19] など、数々の有機物超伝導体が FFLO 状態を実現する物質の候補として研究されている。

また、固体物理以外の分野に於いても、超低温の希薄原子ガスのボース・アインシュタイン凝縮相 [20] や中性子星内部のカラー超伝導 [21] などでも FFLO 状態の出現が预言されており、幅広い分野に関連していることがうかがえる。

1.3 1 粒子エネルギーのシフトに依る FFLO 状態

前述のように FFLO 状態の起源は Zeeman 効果に依る Fermi Surface の分裂が一般的だが、最近では

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(0)} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{k} \quad (1.4)$$

で表されるような 1 粒子エネルギーのシフトが起源となって、FFLO 状態に似た空間変調した超伝導状態が出現すると考えられている。ここで、 \mathbf{k} は波数であり、 \mathbf{V} に波数依存性はないとする。

例えば、D 波超伝導体の Rashba 型スピン - 軌道相互作用を有する空間反転対称性のない超伝導体 (NCSs) の場合、磁場に依って磁場に垂直な面内で、

$$|\mathbf{V}| = \frac{\mu H}{v_F} \quad (1.5)$$

のエネルギーシフトを起こし、2 つの Fermi Surface の中心がずれる。(Fig.1.7) この結果、異方的な Zeeman 効果に依る (渦がないと仮定した時の) 位相の空間変調を反映した新奇渦格子が発生することが知られている。[22,23] この場合、新奇渦格子は異方的構造をとるが、その異方性は磁場とギャップノードの間の相対方向を変えるとともに変化する。

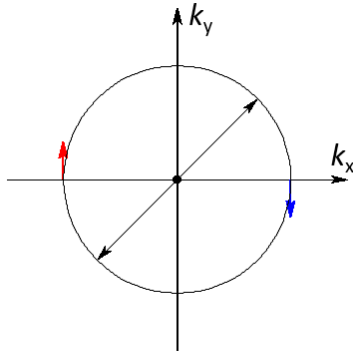


Fig. 1.6: Uniform 状態の Fermi Surface (再掲)

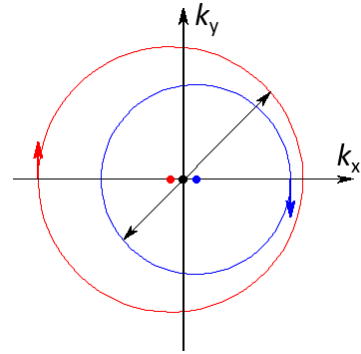


Fig. 1.7: NCSs の Fermi Surface

1.4 薄膜 FFLO 状態

近年では磁場以外を起源とする 1 粒子エネルギーのシフトに依る FFLO 状態が提唱されている。その例としてマルチバンド効果や外部電流 [24] を起源とする FFLO 状態が挙げられるが、本論文に於いては薄膜に於けるサイズ効果を起源とする FFLO 状態（以下、薄膜 FFLO 状態）に焦点を当てることにする。

超伝導薄膜に於いて、D 波・P 波はアンチノード向き（超伝導ギャップが最大方向）と膜面との相対角度によって、“ $D_{x^2y^2}$ 波” と “ D_{xy} 波”、あるいは P_x 波と P_y 波 といった形で区別される。アンチノード向きが膜面と平行（ $[100]$ ）な場合を “ $D_{x^2y^2}$ 波”・ P_x 波、45 度をなす（ $[110]$ ）場合を “ D_{xy} 波”、90 度をなす（ $[010]$ ）場合を P_y 波と呼ぶ。

S 波・P 波・D 波の pairing symmetry はそれぞれ、

$$\mathcal{Y}(\hat{\mathbf{p}}) = \begin{cases} 1 & \dots \text{S 波} \\ \sqrt{2} \cos(\phi_{\hat{\mathbf{p}}}) & \dots \text{P}_x \text{ 波} \\ \sqrt{2} \sin(\phi_{\hat{\mathbf{p}}}) & \dots \text{P}_y \text{ 波} \\ \sqrt{2} \cos(2\phi_{\hat{\mathbf{p}}}) & \dots \text{"D}_{x^2y^2} \text{ 波"} \\ \sqrt{2} \sin(2\phi_{\hat{\mathbf{p}}}) & \dots \text{"D}_{xy} \text{ 波"} \end{cases} \quad (1.6)$$

で表される。ただし、 $\phi_{\hat{\mathbf{p}}}$ は $\hat{\mathbf{p}}$ の向きとする。

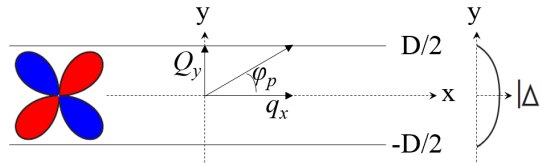


Fig. 1.8: 超伝導薄膜のジオメトリ

ここで、Fig.1.8 のような y 方向に D の厚みを持ち、境界条件として

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - 2\mathbf{y}(\mathbf{y} \cdot \mathbf{p}) \quad (1.7)$$

で表される鏡面反射をする超伝導薄膜を考える。この時、境界面上では、

$$\Delta(\mathbf{p}; y = \pm D/2) = \Delta(\tilde{\mathbf{p}}; y = \pm D/2) \quad (1.8)$$

の等式が成り立つが、

$$\Delta(\mathbf{p}) \simeq p_y \text{ or } p_x p_y \quad (1.9)$$

の条件を満たす場合、

$$\Delta(\mathbf{p}; y = \pm D/2) = -\Delta(\tilde{\mathbf{p}}; y = \pm D/2) \quad (1.10)$$

より、

$$\Delta(\mathbf{p}; y = \pm D/2) = \Delta(\tilde{\mathbf{p}}; y = \pm D/2) = 0 \quad (1.11)$$

となるので、例えば、

$$\Delta(y) \simeq \cos(\pi y/D) \equiv \cos(Q_y y) \quad (1.12)$$

のようなサイズ効果が発生し、

$$|\mathbf{V}| = \frac{\pi}{D} \quad (1.13)$$

のエネルギーシフトを起こす。

つまり、Eq.(1.9) を満たす P_y 波や " D_{xy} 波" に於いてはゼロ磁場であっても pair-potential が膜厚に反比例した空間変調をし、FFLO 状態に似た超伝導状態、即ち薄膜 FFLO 状態が発生することになる。(Fig.1.10)

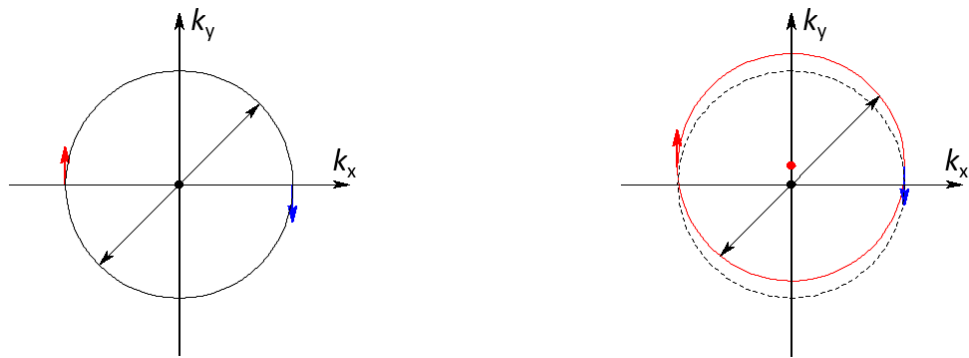


Fig. 1.9: Uniform 状態の Fermi Surface (再掲) Fig. 1.10: 薄膜 FFLO 状態の Fermi Surface

1.4.1 薄膜 FFLO 状態に関する過去の研究

A. B. Vorontsov は準二次元 D 波超伝導体に於けるゼロ磁場での薄膜磁場 FFLO 状態を提唱した。[25] Vorontsov の計算に依ると、" D_{xy} 波" の場合、薄膜 FF 状態が出現するが、" $D_{x^2y^2}$ 波" の場合は薄膜 FF 状態が出現しないことが判明している。参考として Fig.1.11 に " D_{xy} 波" の場合の相図を示した。

Vorontsov の研究を基に K. Aoyama 等は準二次元 P 波超伝導体に於ける薄膜磁場 FFLO 状態の研究を行った。[26] Aoyama 等の計算に依ると、" D_{xy} 波"・ P_y 波の場合は薄膜 FF 状態が出現し、" $D_{x^2y^2}$ 波"・ P_x 波の場合は薄膜 FF 状態が出現しないことが判明している。これらの研究により、薄膜 FFLO 状態の安定性にはフィルム面とギャップノードの相対方向が密接に関係しており、ノード方向がフィルム面に対して平行であれば、膜方向に一次元周期構造を持つ薄膜 FFLO 状態が出現可能となることが解る。この理由については 2.12 節で考察する。

また、Aoyama 等は低磁場下での " D_{xy} 波" の研究も行っており、磁場を加えることで薄膜 FF 状態が抑制されると指摘している。(Fig.1.11) 従来型 FFLO 状態では LO 状態の方が安定であることから、薄膜 FFLO 状態に磁場を加えていくと安定性の逆転が起き、薄膜 FF 状態から薄膜 LO 状態への転移が起きる可能性を示唆している。また、上部臨界膜厚での相転移は低温では一次転移となると指摘しており、従来型 FFLO 状態と同様に相転移の次数が変わることになる。

以上の過去の研究を元に、私は異方的超伝導薄膜に磁場を加えた場合の各種状態の安定性等に関して、特に " D_{xy} 波" の場合の研究を行った。ただし、磁場誘起渦が生じて問題が複雑になるのを避ける為に、磁場は変調方向と平行な方向 (x 軸方向) にかけることで、磁場誘起渦の影響を無視することにする。ここで、平行磁場であっても膜厚があまりに厚い場合は磁場誘起渦の影響を無視できないことに注意する必要がある。

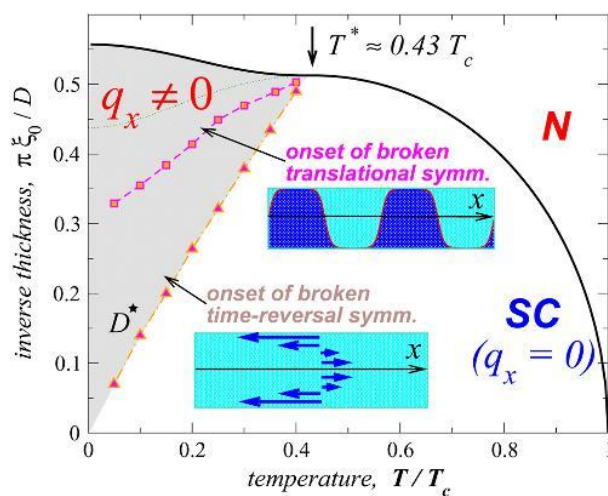


Fig. 1.11: A.B.Vorontsov が GL 方程式で求めた " D_{xy} 波" の t-d 相図。赤色線は薄膜 FF 転移線、桃色線は薄膜 LO 転移線を示している。薄膜 FF 転移線の方が厚膜側に来ており、薄膜 FF 状態の方が安定となっている。

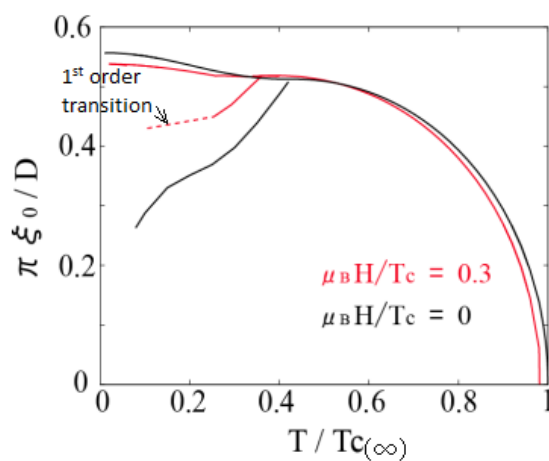


Fig. 1.12: K. Aoyama 等が GL 方程式で求めた " D_{xy} " 波の t-d 相図。磁場を加えることで、薄膜 FF 領域が縮小している。また、有磁場の低温領域では薄膜 FF 転移が一次転移になっている。

第2章 準古典理論の定式

この章では準古典理論の定式化について述べる。初めに Green 関数を定義して Gor'kov 理論を簡単にまとめた後、準古典近似を導入して準古典理論を展開して Eilenberger 方程式を導く。[27–33] その後、Eilenberger 方程式を近似して GL 方程式を求める。[25]

2.1 温度 Green 関数

以下、Ref. [29] の記法に従って、グリーン関数法の定式化を行う。

有限温度では、基底状態に於ける期待値の代わりに密度演算子

$$\rho = e^{-\beta\mathcal{H}}/\Xi, \quad \Xi = \text{Tr} \left(e^{-\beta\mathcal{H}} \right) \quad (2.1)$$

を使用した平均値を用いる。この ρ を使用した平均値を、

$$\langle \dots \rangle \equiv \text{Tr} (\rho \dots) \quad (2.2)$$

とし、虚時間

$$\tau = it \quad (2.3)$$

を用いた Green 関数を温度 Green 関数（通称、松原 Green 関数）と呼ぶ。

Heisenberg 表示の Fermi 粒子演算子、

$$\psi(\mathbf{r}, \tau) = e^{\frac{\tau\mathcal{H}}{\hbar}} \psi(\mathbf{r}) e^{-\frac{\tau\mathcal{H}}{\hbar}} \quad (2.4)$$

$$\psi^\dagger(\mathbf{r}, \tau) = e^{\frac{\tau\mathcal{H}}{\hbar}} \psi^\dagger(\mathbf{r}) e^{-\frac{\tau\mathcal{H}}{\hbar}} \quad (2.5)$$

と、時間順序積を用いて、4 個の温度 Green 関数を以下の様に定義する。

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv - \left\langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{r}_1, \tau_1) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2, \tau_2) \right\rangle \quad (2.6)$$

$$\bar{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv - \left\langle T_\tau \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_1, \tau_1) \psi_\beta(\mathbf{r}_2, \tau_2) \right\rangle \quad (2.7)$$

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv - \left\langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{r}_1, \tau_1) \psi_\beta(\mathbf{r}_2, \tau_2) \right\rangle \quad (2.8)$$

$$\bar{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv - \left\langle T_\tau \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_1, \tau_1) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2, \tau_2) \right\rangle \quad (2.9)$$

ここで、 G は通常の Green 関数であり、 F は異常 Green 関数である。また、 $\bar{G} = -G^\dagger$ 、 $\bar{F} = -F^\dagger$ となっている。以下では、 $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{r}, \tau)$ とする。

これらの間には以下の様な対称性が存在する。

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= -\left\langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \right\rangle = \left\langle T_\tau \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \right\rangle \\ &= -\bar{G}_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= -\left\langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \right\rangle^* = -\left\langle T_\tau \psi_\beta(\mathbf{r}_2, -\tau_2) \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_1, -\tau_1) \right\rangle \\ &= G_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \tau_1 - \tau_2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= -\left\langle T_\tau \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{x}_1) \psi_\beta(\mathbf{x}_2) \right\rangle^* = -\left\langle T_\tau \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2, -\tau_2) \psi_\alpha(\mathbf{r}_1, -\tau_1) \right\rangle \\ &= \bar{G}_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \tau_1 - \tau_2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= -\left\langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \psi_\beta(\mathbf{x}_2) \right\rangle = \left\langle T_\tau \psi_\beta(\mathbf{x}_2) \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \right\rangle \\ &= -F_{\beta\alpha}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= -\left\langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \psi_\beta(\mathbf{x}_2) \right\rangle^* = -\left\langle T_\tau \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2, -\tau_2) \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_1, -\tau_1) \right\rangle \\ &= \bar{F}_{\beta\alpha}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \tau_1 - \tau_2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

また、 $\tau = \tau_1 - \tau_2 > 0$ の時、

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \tau) &= -\Xi^{-1} \text{Tr} \left(e^{-\beta\mathcal{H}} e^{\frac{\tau\mathcal{H}}{\hbar}} \psi_\alpha(\mathbf{r}_1) e^{-\frac{\tau\mathcal{H}}{\hbar}} \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2) \right) \\ &= -\Xi^{-1} \text{Tr} \left(e^{-\frac{\tau\mathcal{H}}{\hbar}} \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2) e^{-\beta\mathcal{H}} e^{\frac{\tau\mathcal{H}}{\hbar}} \psi_\alpha(\mathbf{r}_1) \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

となり、 $\tau < 0$ の時、

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \tau) = \Xi^{-1} \text{Tr} \left(e^{-\beta\mathcal{H}} e^{-\frac{\tau\mathcal{H}}{\hbar}} \psi_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2) e^{\frac{\tau\mathcal{H}}{\hbar}} \psi_\alpha(\mathbf{r}_1) \right) \quad (2.16)$$

となる。これらより、

$$G(\tau < 0) = -G(\tau + \hbar\beta > 0) \quad (2.17)$$

という反周期性を持つことが解る。これは \bar{G} 、 F 、 \bar{F} に関しても同様である。

2.2 Gor'kov 方程式

G を時間順序積を用いずに具体的に書き表すと、

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\left\langle \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \theta(\tau_1 - \tau_2) - \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \theta(\tau_2 - \tau_1) \right\rangle \quad (2.18)$$

となる。これを虚時間 τ_1 で微分すると、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \tau_1} G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \delta(\tau_1 - \tau_2) \left\langle \left[\psi_\alpha(\mathbf{x}_1), \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \right]_+ \right\rangle + \left\langle T_\tau \frac{\partial}{\partial \tau_1} \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \right\rangle \\ &= \delta_{\alpha\beta} \delta^{(4)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + \left\langle T_\tau [\mathcal{H}, \psi_\alpha(\mathbf{x}_1)] \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる。

BCS-Hamiltonian を、

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_1) \{H(\mathbf{r}_1) - \mu\} \psi_\alpha(\mathbf{r}_1) d^3\mathbf{r}_1 \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \int \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_1) \psi_\gamma^\dagger(\mathbf{r}) g \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \psi_\gamma(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r}_1) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.20)$$

とする。ここでは、 $g > 0$ 、つまり、引力作用としている。また、

$$H(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}A(\mathbf{r}) \right)^2 \quad (2.21)$$

である。

この時、Heisenberg 方程式は、

$$[\mathcal{H}, \psi_\alpha(\mathbf{x}_1)] = -\{H(\mathbf{r}_1) - \mu\} \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) + g \psi_\gamma^\dagger(\mathbf{x}_1) \psi_\gamma(\mathbf{x}_1) \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \quad (2.22)$$

となるので、

$$\begin{aligned} &\left\langle T_\tau [\mathcal{H}, \psi_\alpha(\mathbf{x}_1)] \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \right\rangle \\ &= \{H(\mathbf{r}_1) - \mu\} G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + g \left\langle T_\tau \psi_\gamma^\dagger(\mathbf{x}_1) \psi_\gamma(\mathbf{x}_1) \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.23)$$

となり、Eq.(2.19) 代入することで、

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{\partial}{\partial \tau_1} - H(\mathbf{r}_1) + \mu \right) G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ &= \delta_{\alpha\beta} \delta^{(4)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + g \left\langle T_\tau \psi_\gamma^\dagger(\mathbf{x}_1) \psi_\gamma(\mathbf{x}_1) \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.24)$$

を得られる。

ここで、Wick の定理より、

$$\begin{aligned} \left\langle T_\tau \psi_\gamma^\dagger(\mathbf{x}_1) \psi_\gamma(\mathbf{x}_1) \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \right\rangle &= - \left\langle T_\tau \psi_\gamma(\mathbf{x}_1) \psi_\gamma^\dagger(\mathbf{x}_1) \right\rangle \left\langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \psi_\gamma^\dagger(\mathbf{x}_1) \right\rangle \left\langle T_\tau \psi_\gamma(\mathbf{x}_1) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle T_\tau \psi_\alpha(\mathbf{x}_1) \psi_\gamma(\mathbf{x}_1) \right\rangle \left\langle T_\tau \psi_\gamma^\dagger(\mathbf{x}_1) \psi_\beta^\dagger(\mathbf{x}_2) \right\rangle \end{aligned} \quad (2.25)$$

となるので、self-energy

$$\Sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = -\left\langle T_{\tau}\psi_{\alpha}(\mathbf{x})\psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}) \right\rangle = G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (2.26)$$

及び、pair-potential

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = -g\left\langle T_{\tau}\psi_{\alpha}(\mathbf{x})\psi_{\beta}(\mathbf{x}) \right\rangle = gF_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (2.27)$$

$$\bar{\Delta}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = -g\left\langle T_{\tau}\psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{x})\psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{x}) \right\rangle = g\bar{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (2.28)$$

及び、異常 Green 関数を用いることで、Eq.(2.24) は、

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial}{\partial\tau_1} - H(\mathbf{r}_1) + \mu\right) G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + g\Sigma_{\gamma\gamma}(\mathbf{x}_1)G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - g\Sigma_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}_1)G_{\gamma\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ = \delta_{\alpha\beta}\delta^{(4)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) - \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}_1)\bar{F}_{\gamma\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。ここで、 Σ が関わる項は chemical-potential μ の補正項となっているが、BCS 理論では Cooper-pair を作る相互作用以外は無視するので、落とすことができる。

\bar{G} 、 F 、 \bar{F} についても同様の計算を行うことで、4 個の運動方程式

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\tau_1} - H(\mathbf{r}_1) + \mu\right) G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}_1)\bar{F}_{\gamma\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \delta_{\alpha\beta}\delta^{(4)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (2.30)$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial\tau_1} - H^{\dagger}(\mathbf{r}_1) + \mu\right) \bar{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \bar{\Delta}_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}_1)F_{\gamma\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \delta_{\alpha\beta}\delta^{(4)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (2.31)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\tau_1} - H(\mathbf{r}_1) + \mu\right) F_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}_1)\bar{G}_{\gamma\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0 \quad (2.32)$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial\tau_1} - H^{\dagger}(\mathbf{r}_1) + \mu\right) \bar{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + \bar{\Delta}_{\alpha\gamma}(\mathbf{x}_1)G_{\gamma\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0 \quad (2.33)$$

を得られ、これらを Gor'kov 方程式と呼ぶ。

2.2.1 singlet-pairing

singlet-pairing の場合、pair-potential は spin index の交換に対して反対称になるので、Pauli 行列

$$\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

を利用して、

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = i\sigma_{\alpha\beta}^y\Delta(\mathbf{x}) \quad (2.35)$$

$$\bar{\Delta}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = -i\sigma_{\alpha\beta}^y\bar{\Delta}(\mathbf{x}) \quad (2.36)$$

と表すことで、spin index を持たない量を定義できる。

また、Eq.(2.27)、(2.28) から解るように、異常 Green 関数は pair-potential と密接に関連しているので、

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = i\sigma_{\alpha\beta}^y F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (2.37)$$

$$\bar{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -i\sigma_{\alpha\beta}^y \bar{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (2.38)$$

と、同様の表現を用いることができる。

ここで、Eq.(2.30)(2.31) を見ると、左辺第2項及び右辺は spin index が $\alpha = \beta$ の時のみ、値を持ちうるので、左辺第1項の Green 関数は、

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \delta_{\alpha\beta} G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (2.39)$$

$$\bar{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \delta_{\alpha\beta} \bar{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (2.40)$$

とならなければならない。

以上より、Gor'kov 方程式は、

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{\partial}{\partial\tau_1} - H(\mathbf{r}_1) + \mu \right) & -\Delta(\mathbf{x}_1) \\ \bar{\Delta}(\mathbf{x}_1) & \left(\frac{\partial}{\partial\tau_1} - H^\dagger(\mathbf{r}_1) + \mu \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ -\bar{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & -\bar{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{pmatrix} = \delta^{(4)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

と、spin index を持たない行列式で表すことができる。

また、Green 関数の行列表示として、

$$\check{G}^{-1}(\mathbf{x}_1) \equiv \begin{pmatrix} \left(-\frac{\partial}{\partial\tau_1} - H(\mathbf{r}_1) + \mu \right) & -\Delta(\mathbf{x}_1) \\ \bar{\Delta}(\mathbf{x}_1) & \left(\frac{\partial}{\partial\tau_1} - H^\dagger(\mathbf{r}_1) + \mu \right) \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

$$\check{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv \begin{pmatrix} G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ -\bar{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & -\bar{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

と定義すると、Gor'kov 方程式は、

$$\check{G}^{-1}(\mathbf{x}_1)\check{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \check{1}\delta^{(4)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (2.44)$$

と、簡易に表現できる。

この表示では以下の様な対称性が存在する。

$$G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = -\bar{G}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \quad (2.45)$$

$$G^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \tau_1 - \tau_2) \quad (2.46)$$

$$\bar{G}^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \bar{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \tau_1 - \tau_2) \quad (2.47)$$

$$F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = F(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \quad (2.48)$$

$$F^*(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \bar{F}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; \tau_1 - \tau_2) \quad (2.49)$$

以上では τ_1 に関する運動方程式を求めたが、 τ_2 に関しても同様の計算を行うことができ、

$$\begin{pmatrix} G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ -\bar{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & -\bar{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tau_2} - H^\dagger(\mathbf{r}_2) + \mu \right) & -\Delta(\mathbf{x}_2) \\ \bar{\Delta}(\mathbf{x}_2) & \left(-\frac{\partial}{\partial \tau_2} - H(\mathbf{r}_2) + \mu \right) \end{pmatrix} \\ = \delta^{(4)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

となる。ここでも、

$$\check{G}^{-1}(\mathbf{x}_2) \equiv \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tau_2} - H^\dagger(\mathbf{r}_2) + \mu \right) & -\Delta(\mathbf{x}_2) \\ \bar{\Delta}(\mathbf{x}_2) & \left(-\frac{\partial}{\partial \tau_2} - H(\mathbf{r}_2) + \mu \right) \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

と、定義すると、Gor'kov 方程式は、

$$\check{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \check{G}^{-1}(\mathbf{x}_2) = \check{1} \delta^{(4)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (2.52)$$

と、簡易に表現できる。Eq.(2.67) の様に演算子が左側に Gor'kov 方程式を左 Gor'kov 方程式と呼び、Eq.(2.52) の様に演算子が右側に Gor'kov 方程式を右 Gor'kov 方程式と呼ぶ。

2.2.2 triplet-pairing

triplet-pairing の場合、pair-potential は spin index の交換に対して対称になるので、singlet-pairing の時と同様に、Pauli 行列

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

を利用して、

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha\beta}^x \Delta(\mathbf{x}) \quad (2.54)$$

$$\bar{\Delta}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha\beta}^x \bar{\Delta}(\mathbf{x}) \quad (2.55)$$

と表すことで、spin index を持たない量を定義できる。

異常 Green 関数に関しても同様に、

$$F_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sigma_{\alpha\beta}^x F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (2.56)$$

$$\bar{F}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sigma_{\alpha\beta}^x \bar{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (2.57)$$

と、表現することができる。そして、Green 関数に関しても、同様の理由から、

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \delta_{\alpha\beta} G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (2.58)$$

$$\bar{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \delta_{\alpha\beta} \bar{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (2.59)$$

とならなければならない。

以上より、Gor'kov 方程式は、

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{\partial}{\partial \tau_1} - H(\mathbf{r}_1) + \mu \right) & -\Delta(\mathbf{x}_1) \\ \bar{\Delta}(\mathbf{x}_1) & \left(\frac{\partial}{\partial \tau_1} - H^\dagger(\mathbf{r}_1) + \mu \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & F(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ -\bar{F}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & -\bar{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{pmatrix} \\ = \delta^{(4)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

と、spin index を持たない行列式で表すことができ、形式的には singlet-pairing の場合と同じ結果になることが解る。

2.3 Fourier 変換

Eq.(2.17) で示したように、Green 関数が時間周期性を持つことに注意すると、虚時間に対する Fourier 変換は、

$$\check{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{\hbar\beta} \sum_n e^{-i\omega_n(\tau_1 - \tau_2)} \check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) \quad (2.61)$$

$$\check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) = \int_0^{\hbar\beta} e^{i\omega_n(\tau_1 - \tau_2)} \check{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\tau \quad (2.62)$$

と書くことができる。ただし、

$$\omega_n \equiv \frac{(2n+1)\pi k_B T}{\hbar} \quad (2.63)$$

であり、これを松原周波数と呼ぶ。 $\hbar = 1$ とする場合は松原エネルギーと呼び、 ϵ_n で表すこともある。

ここで、

$$\check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) \equiv \begin{pmatrix} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) & F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) \\ -\bar{F}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) & -\bar{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$$\check{G}^{-1}(\mathbf{r}_1; i\omega_n) \equiv \begin{pmatrix} (i\omega_n - H(\mathbf{r}_1) + \mu) & -\Delta(\mathbf{r}_1) \\ \bar{\Delta}(\mathbf{r}_1) & (-i\omega_n - H^\dagger(\mathbf{r}_1) + \mu) \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

$$\check{G}^{-1}(\mathbf{r}_2; i\omega_n) \equiv \begin{pmatrix} (i\omega_n - H^\dagger(\mathbf{r}_2) + \mu) & -\Delta(\mathbf{r}_2) \\ \bar{\Delta}(\mathbf{r}_2) & (-i\omega_n - H(\mathbf{r}_2) + \mu) \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

と定義すると、Gor'kov 方程式は、

$$\check{G}^{-1}(\mathbf{r}_1; i\omega_n) \check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) = \check{1} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (2.67)$$

$$\check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) \check{G}^{-1}(\mathbf{r}_2; i\omega_n) = \check{1} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (2.68)$$

と、表すことができる。

この表示では以下の様な対称性が存在する。

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) = -\bar{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; -i\omega_n) \quad (2.69)$$

$$G^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) = G(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; -i\omega_n) \quad (2.70)$$

$$\bar{G}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) = \bar{G}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; -i\omega_n) \quad (2.71)$$

$$F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) = F(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; -i\omega_n) \quad (2.72)$$

$$F^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) = \bar{F}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1; -i\omega_n) \quad (2.73)$$

さらに、座標に対して Fourier 変換すると、

$$\check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) = \int \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \check{G}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) e^{-i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} \quad (2.74)$$

$$\check{G}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} \quad (2.75)$$

と、書ける。

この表示では以下の様な対称性が存在する。

$$G(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) = -\bar{G}(-\mathbf{p}_2, -\mathbf{p}_1; -i\omega_n) \quad (2.76)$$

$$G^*(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) = G(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1; -i\omega_n) \quad (2.77)$$

$$\bar{G}^*(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) = \bar{G}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1; -i\omega_n) \quad (2.78)$$

$$F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) = F(-\mathbf{p}_2, -\mathbf{p}_1; -i\omega_n) \quad (2.79)$$

$$F^*(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) = \bar{F}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1; -i\omega_n) \quad (2.80)$$

2.4 一様で外部磁場のない singlet-pairing の超伝導体

参考として、系が空間的に一様で、並進対称性を持ち、磁場のない場合を考える。

この時、並進対称性より、

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} \\
 &= \int d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; i\omega_n) e^{i\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \int d\mathbf{r}_2 e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{r}_2} \\
 &= G(\mathbf{p}_1; i\omega_n) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \frac{1}{(2\pi)^3}
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

となるので、Gor'kov 方程式から G と \bar{F} に関する方程式、

$$(i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}_1})G(\mathbf{p}_1; i\omega_n) + \Delta \bar{F}(\mathbf{p}_1; i\omega_n) = 1 \tag{2.82}$$

$$(i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}_1})\bar{F}(\mathbf{p}_1; i\omega_n) + \bar{\Delta}G(\mathbf{p}_1; i\omega_n) = 0 \tag{2.83}$$

が導かれる。ここで、

$$\xi_{\mathbf{p}_1} = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} - \mu \tag{2.84}$$

である。また、Eq.(2.80) より、

$$\bar{\Delta} = \Delta^* \tag{2.85}$$

であることに注意すると、この連立方程式は簡単に解くことができ、

$$G(\mathbf{p}_1; i\omega_n) = -\frac{i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}_1}}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}_1}^2 + |\Delta|^2} \tag{2.86}$$

$$\bar{F}(\mathbf{p}_1; i\omega_n) = \frac{\bar{\Delta}}{\omega_n^2 + \xi_{\mathbf{p}_1}^2 + |\Delta|^2} \tag{2.87}$$

となる。この結果より、 ξ_p 空間に於いて、 G は ξ_p^{-1} で、 \bar{F} は ξ_p^{-2} で減衰する関数だと解る。

また、

$$F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau_1 - \tau_2) = \frac{1}{\hbar\beta} \sum_n F_n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) e^{-i\omega_n(\tau_1 - \tau_2)} \tag{2.88}$$

であることに注意すると、前述の結果より、

$$\begin{aligned}
 \Delta &= gF(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1; 0-) \\
 &= \frac{g}{\hbar\beta} \sum_n F_n(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1; i\omega_n) e^{i\omega_n 0+} \\
 &= \frac{g}{\hbar\beta} \sum_n \int \frac{dk}{(2\pi)^3} F_n(k; i\omega_n) e^{-ik(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1)} e^{i\omega_n 0+} \\
 &= gT \sum_n \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{\Delta}{\omega_n^2 + \xi_k^2 + |\Delta|^2}
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

となる。ただし、最後の式変形では $\hbar = k_B = 1$ としてる。

最後に、

$$\sum_n \frac{x}{x^2 + (2n+1)^2\pi^2} = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \tag{2.90}$$

という関係式を用いると、

$$\Delta = g \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{\Delta}{2E_k} \tanh \frac{E_k}{2T} \tag{2.91}$$

となる。ただし、

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + |\Delta|^2} \tag{2.92}$$

である。

これが gap 方程式であり、Bogoliubov 変換の結果と同じになっていることが確かめられた。

2.5 準古典近似

ある物理量を求める演算子 Q は一粒子辺りの物理量の演算子 q を用いて、

$$Q = \int d\mathbf{r}_1 \psi^\dagger(\mathbf{r}_1) q(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_1) \tag{2.93}$$

と定義できるので、基底状態での期待値は、

$$\langle Q \rangle = \left\langle \int d^3\mathbf{r}_1 \psi^\dagger(\mathbf{r}_1) q(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_1) \right\rangle \tag{2.94}$$

$$= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) q(\mathbf{r}_1) \langle \psi^\dagger(\mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_1) \rangle \tag{2.95}$$

と表すことができ、温度 Green 関数を用いると、

$$\langle Q \rangle = \lim_{\tau_2 \rightarrow \tau_1 -} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) q(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau_1 - \tau_2) \quad (2.96)$$

となる。さらに虚時間と座標の両方に対して Fourier 変換すると、

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \lim_{\tau_2 \rightarrow \tau_1 -} \frac{1}{\hbar\beta} \sum_n \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) q(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) e^{i\omega_n(\tau_1 - \tau_2)} e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} \\ &= \frac{1}{\hbar\beta} \sum_n \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) q(\mathbf{r}_1) G(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} \end{aligned} \quad (2.97)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2} \quad (2.98)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2} \quad (2.99)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p} + \frac{\mathbf{k}}{2} \quad (2.100)$$

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p} - \frac{\mathbf{k}}{2} \quad (2.101)$$

と、重心座標 \mathbf{R} ・相対座標 \mathbf{r} ・重心運動量 \mathbf{p} ・相対運動量 \mathbf{k} を導入すると、

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{\hbar\beta} \sum_n \int d\mathbf{R} d\mathbf{r} q\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} G(\mathbf{p}, \mathbf{k}; i\omega_n) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \delta(\mathbf{r}) \quad (2.102)$$

となる。

以上のように、運動量表示に於ける Green 関数法を用いて種々の物理量を求めようとするれば、運動量 \mathbf{p} に関する積分が現れる。この時、被積分関数の中では Green 関数が $|\mathbf{p}|$ に関して最も急激に変化する。また、BCS 理論から予想されるように、Fermi 面付近に於いてエネルギーギャップなどの特性が現れるので、Green 関数は $\delta\xi_p \sim \Delta$ 程度の幅に局在したピークを持つことになる。これを考慮すると、 $\Delta \ll E_F$ を満たす準古典近似では、他の被積分関数は、その Fermi 面上の値で近似することができる。言い換えると、 \mathbf{p} に関する積分を \mathbf{p} の立体角 Ω_p に関する積分と、絶対値 $|\mathbf{p}|$ に関する積分とに分けることができ、Green 関数のみが後者の被積分関数となる。

運動量空間の積分をエネルギー空間での積分に置き換えると、

$$\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = d\xi_p \frac{dS_F}{(2\pi)^3 v_F} \quad (2.103)$$

となる。ここで、

$$\xi_p = E_n(\mathbf{p}) - E_F \quad (2.104)$$

であり、 E_n は常伝導状態時に計った時のエネルギーである。また、自由電子の速度は $v \propto E^{\frac{1}{2}}$ なので、 $\Delta \ll E_F$ の時、 $v(E) \sim v(E_F) = v_F$ と近似できる。

Fermi 面が球であれば、

$$dS_F = \mathbf{p}_F^2 d\Omega_p \quad (2.105)$$

なので、

$$\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \frac{\mathbf{p}_F^2}{(2\pi)^3 v_F} d\xi_p d\Omega_p \quad (2.106)$$

となる。超伝導状態ではバンドギャップが開くが、 $\Delta \ll E_F$ の時は Fermi 面を球とみなしてもよい。以上より、

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \frac{\mathbf{p}_F^2}{\hbar\beta(2\pi)^3 v_F} \sum_n \int d\mathbf{R} d\mathbf{r} q(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}) d\xi_p d\Omega_p \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} G(\mathbf{p}, \mathbf{k}; i\omega_n) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \delta(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\mathbf{p}_F^2}{\hbar\beta(2\pi)^3 v_F} \sum_n \int d\mathbf{R} q(\mathbf{R}) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} d\Omega_p e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} d\xi_p G(\mathbf{p}, \mathbf{k}; i\omega_n) \end{aligned} \quad (2.107)$$

となる。2.6.2 節で後述するように、 $d\xi_p G(\mathbf{p}, \mathbf{k}; i\omega_n)$ は発散するので、単純に準古典 Green 関数を定義することはできない。しかし、物理量の計算では $\mathbf{r} \rightarrow 0$ となるので、絶対値と方向のみの被積分関数しか残らないので、運動量の大きさに関して、何らかの積分量を定義するのは有益である。前述のように、Green 関数以外の $|p|$ 依存性を全て Fermi 面上の値で近似するのならば、その近似の結果、準古典 Green 関数に関する方程式が導出される。

2.6 準古典 Green 関数

$|p|$ に関して積分された Green 関数（準古典 Green 関数）について考える。相対座標 \mathbf{r} に関する振動の特徴的な長さのスケールは $|\mathbf{p}_F|^{-1}$ であり、そのエネルギーの大きさから解るように、超伝導体の性質にとって本質的ではなく、 ξ の長さのスケールで変化する重心座標のみが本質的に寄与する。従って、 \mathbf{p} に関する積分に於いて準古典近似を行うということは、Green 関数から超伝導にとって重要でない余分な情報を取り除くということである。

Gor'kov 理論から相対座標に関する情報を取り除いて、この準古典 Green 関数について閉じた理論を構成することができ、これが準古典理論である。前述のような理由から、準古典理論は Gor'kov 理論に比べて取り扱いが容易になり、特に空間的に非一様な状況に於けるミクロな理論として強力である。

2.6.1 準古典異常 Green 関数

容易な異常 Green 関数から考える。Eq.(2.87) から解るように、異常 Green 関数は超伝導状態でのみ有限の値を持ち、 ξ_p^{-2} で減衰する。これより、 ξ_p に関する積分を近似的に、

$$\int \frac{d\xi_p}{\pi i} F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) = \oint \frac{d\xi_p}{\pi i} F(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) \equiv f(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{k}; i\omega_n) \quad (2.108)$$

$$\int \frac{d\xi_p}{\pi i} \bar{F}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) = \oint \frac{d\xi_p}{\pi i} \bar{F}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) \equiv \bar{f}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{k}; i\omega_n) \quad (2.109)$$

と表すことで、準古典異常 Green 関数を定義することができる。ここで、周回積分は Fermi 面近傍の極を拾うものとし、 $\hat{\mathbf{p}}$ は極座標表示をした際の \mathbf{r} 軸方向に対応する。

πi で割っているのは 2.8 節で行う規格化条件を見越してのことであり、文献によっては πi で割っていないこともある。

2.6.2 準古典 Green 関数

一方、Green 関数は Eq.(2.86) から解るように、常伝導状態でも値を持つので、全空間での積分は発散してしまい、物理量を計算する際に単純に ξ_p の積分として準古典 Green 関数を用いることはできない。従って、 G を常伝導成分 G^n と超伝導成分 $G - G^n$ に分ける必要がある。この時、

$$\int \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{2\pi^2} G(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) = \int \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{2\pi^2} G^n + \int \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{2\pi^2} [G - G^n] \quad (2.110)$$

$$= \int \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{2\pi^2} G^n + \nu(\hat{\mathbf{p}}) \oint d\xi_p [G - G^n] \quad (2.111)$$

となる。ただし、 $\nu(\hat{\mathbf{p}})$ は $\hat{\mathbf{p}}$ 方向に於ける Fermi 面上の状態密度である。

ここで、

$$\begin{aligned} G^n(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) &= \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 G^n(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} \\ &= \int d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) G^n(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; i\omega_n) e^{i\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \int d\mathbf{r}_2 e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{r}_2} \\ &= G^n(\mathbf{p}_1; i\omega_n) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \\ &= -\frac{1}{\xi_p - i\omega_n} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \\ &= -\left(\mathcal{P} \frac{1}{\xi_p} + i\pi \text{sign}(\omega_n) \delta(\xi_p) \right) (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2.112)$$

であることから、

$$\oint d\xi_p G^n = -i\pi \text{sign}(\omega_n) \quad (2.113)$$

となる。そこで、周回積分として、

$$\oint \frac{d\xi_p}{\pi i} G(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) \equiv g(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{k}; i\omega_n) \quad (2.114)$$

を準古典 Green 関数として定義すると、

$$\int \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{2\pi^2} G = -(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \mathcal{P} \int \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{2\pi^2} \frac{1}{\xi_p} + \nu(\hat{p}) i\pi [g + (2\pi)^3 \text{sign}(\omega_n) \delta(\mathbf{k})] \quad (2.115)$$

が得られる。

\bar{G} に関しても同様にして、

$$\oint \frac{d\xi_p}{\pi i} \bar{G}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; i\omega_n) \equiv \bar{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{k}; i\omega_n) \quad (2.116)$$

と定義することで、

$$\int \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{2\pi^2} \bar{G} = -(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}) \mathcal{P} \int \frac{\mathbf{p}^2 d\mathbf{p}}{2\pi^2} \frac{1}{\xi_p} + \nu(\hat{\mathbf{p}}) i\pi [\bar{g} + (2\pi)^3 \text{sign}(\omega_n) \delta(\mathbf{k})] \quad (2.117)$$

が得られる。

2.6.3 準古典 Green 関数の行列表示

準古典 Green 関数の行列表示として、

$$\check{g}(\hat{p}, k; i\omega_n) \equiv \begin{pmatrix} g(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{k}; i\omega_n) & f(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{k}; i\omega_n) \\ -\bar{f}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{k}; i\omega_n) & -\bar{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{k}; i\omega_n) \end{pmatrix} \quad (2.118)$$

を定義する。これを k に対して Fourier 変換すると、

$$\check{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = \begin{pmatrix} g(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) & f(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) \\ -\bar{f}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) & -\bar{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) \end{pmatrix} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \check{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{k}; i\omega_n) \quad (2.119)$$

となる。

この表示では以下の様な対称性が存在する。

$$g(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = -\bar{g}(-\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; -i\omega_n) \quad (2.120)$$

$$g^*(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = -g(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; -i\omega_n) \quad (2.121)$$

$$\bar{g}^*(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = -\bar{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; -i\omega_n) \quad (2.122)$$

$$f(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = f(-\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; -i\omega_n) \quad (2.123)$$

$$f^*(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = -\bar{f}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; -i\omega_n) \quad (2.124)$$

ただし、2.6.1 節で述べたように、準古典 Green 関数を定義する際に πi で割っていない場合は、
* を含む等式に於いて、正負が反転することに注意する必要がある。

2.7 Eilenberger 方程式

Gor'kov 方程式から準古典 Green 関数が従う運動法定式を導く。この際、相対座標に関する情報や不純物などによる自己エネルギーは小さいと近似して無視する。また、ゲージとして、

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.125)$$

を取り、 \mathbf{A} の二次の項を無視する。

磁場がある時の Gor'kov 方程式は、

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{\dot{\nabla}_1^2}{2m} + \mu\right) & -\Delta(\mathbf{x}_1) \\ \bar{\Delta}(\mathbf{x}_1) & \left(\frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{\dot{\nabla}_1^2}{2m} + \mu\right) \end{pmatrix} \check{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \delta^{(4)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.126)$$

$$\check{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \tau_2} + \frac{\dot{\nabla}_2^2}{2m} + \mu\right) & -\Delta(\mathbf{x}_2) \\ \bar{\Delta}(\mathbf{x}_2) & \left(-\frac{\partial}{\partial \tau_2} + \frac{\dot{\nabla}_2^2}{2m} + \mu\right) \end{pmatrix} = \delta^{(4)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.127)$$

と書くことができる。ただし、

$$\dot{\nabla}_i \equiv \nabla_i - \frac{ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \quad (2.128)$$

$$\dot{\nabla}_i \equiv \nabla_i + \frac{ie}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i) \quad (2.129)$$

と定義しており、微分演算子 ∇_i は r_i に対してのみ作用する。

相対座標に関する項を小さいと近似したいので、2つの Gor'kov 方程式の差を取ると都合が良い。ここで、

$$\check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) \equiv \begin{pmatrix} 0 & \Delta(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) \\ -\bar{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.130)$$

と定義し、また、Pauli 行列

$$\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.131)$$

を利用する。

虚時間に対して Fourier 変換した後、左 Gor'kov 方程式から右 Gor'kov 方程式を引くと、

$$\begin{aligned}
& \check{G}^{-1}(\mathbf{r}_1; i\omega_n) \check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) - \check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) \check{G}^{-1}(\mathbf{r}_2; i\omega_n) \\
&= \begin{pmatrix} \left(i\omega_n + \frac{\check{\nabla}_1^2}{2m} + \mu \right) & -\Delta(\hat{\mathbf{p}}_1, \mathbf{r}_1) \\ \bar{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}_1, \mathbf{r}_1) & \left(-i\omega_n + \frac{\check{\nabla}_1^2}{2m} + \mu \right) \end{pmatrix} \check{G} \\
&\quad - \check{G} \begin{pmatrix} \left(i\omega_n + \frac{\check{\nabla}_2^2}{2m} + \mu \right) & -\Delta(\hat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r}_2) \\ \bar{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r}_2) & \left(-i\omega_n + \frac{\check{\nabla}_2^2}{2m} + \mu \right) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\nabla_1^2 - \nabla_2^2}{2m} \check{G} + i\omega_n [\sigma^z, \check{G}] - \{ \check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}_1, \mathbf{r}_1) \check{G} - \check{G} \check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r}_2) \} \\
&\quad - \frac{ie}{mc} \{ \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_1 \sigma^z \check{G} + \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) \cdot \nabla_2 \check{G} \sigma^z \} \\
&= \frac{\nabla_1^2 - \nabla_2^2}{2m} \check{G} + i\omega_n [\sigma^z, \check{G}] - \left[\frac{\check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}_1, \mathbf{r}_1) + \check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r}_2)}{2}, \check{G} \right] \\
&\quad - \left[\frac{\check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}_1, \mathbf{r}_1) - \check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r}_2)}{2}, \check{G} \right]_+ - \frac{ie}{mc} \{ \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_1 \sigma^z \check{G} + \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) \cdot \nabla_2 \check{G} \sigma^z \} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.132}$$

となる。

ここで、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} の変化する特徴的な長さのスケールは λ_L 、pair-potential $\Delta(r_i)$ 及び重心座標 \mathbf{R} の変化する特徴的な長さのスケールは ξ 程度である。これらに対し、相対座標 \mathbf{r} に関する振動の特徴的な長さのスケールは $|\mathbf{p}_F|^{-1}$ と遥かに小さい。従って、最終的には積分して準古典 Green 関数の運動方程式を得たい、という方針を念頭に置くと、

$$\left[\frac{\check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}_1, \mathbf{r}_1) + \check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r}_2)}{2}, \check{G} \right] \sim [\check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}), \check{G}] \tag{2.133}$$

$$\left[\frac{\check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}_1, \mathbf{r}_1) - \check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}_2, \mathbf{r}_2)}{2}, \check{G} \right]_+ \sim 0 \tag{2.134}$$

$$\{ \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \cdot \nabla_1 \sigma^z \check{G} + \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) \cdot \nabla_2 \check{G} \sigma^z \} \sim \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot \{ \nabla_1 \sigma^z \check{G} + \nabla_2 \check{G} \sigma^z \} \tag{2.135}$$

と、近似することができる。これより、

$$\frac{\nabla_1^2 - \nabla_2^2}{2m} \check{G} + [i\omega_n \sigma^z - \check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}), \check{G}] - \frac{ie}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot \{ \nabla_1 \sigma^z \check{G} + \nabla_2 \check{G} \sigma^z \} = 0 \tag{2.136}$$

となる。

ここで、 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ に対して作用する微分演算子 ∇_1, ∇_2 を重心座標 \mathbf{R} 及び相対座標 \mathbf{r} に対して作用する微分演算子 $\nabla, \bar{\nabla}$ に置き換えると、

$$\nabla_1 = \frac{1}{2} \nabla + \bar{\nabla} \tag{2.137}$$

$$\nabla_2 = \frac{1}{2} \nabla - \bar{\nabla} \tag{2.138}$$

なので、

$$\frac{\nabla \bar{\nabla}}{m} \check{G} + [i\omega_n \sigma^z - \check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}), \check{G}] - \frac{ie}{mc} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot \left\{ [\sigma^z, \bar{\nabla} \check{G}] + \frac{1}{2} [\sigma^z, \nabla \check{G}]_+ \right\} = 0 \quad (2.139)$$

となる。この時、第1項と最終項の係数を比べると、

$$v_F \nabla \check{G} \gg \frac{e}{mc} \mathbf{A} \nabla \check{G} \quad (2.140)$$

なので、最終項は無視することができる。

今、Green 関数の \mathbf{r} に対する Fourier 表示は、

$$\check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i\omega_n) = \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \check{G}(p, \mathbf{R}; i\omega_n) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.141)$$

なので、

$$-iv_F \cdot \nabla \check{G}(\mathbf{p}, \mathbf{R}; i\omega_n) = [i\omega_n \sigma^z - \check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) + \frac{e}{c} v_F \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) \sigma^z, \check{G}(\mathbf{p}, \mathbf{R}; i\omega_n)] \quad (2.142)$$

となり、相対座標が陽に現れない方程式を導出できた。

最後に、Green 関数以外の ξ_p 依存性を無視し、Fermi 面上の値に置換し、 ξ_p で周回積分すると、

$$\begin{aligned} -iv_F \cdot \nabla \check{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) &= [i\omega_n \sigma^z - \check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) + \frac{e}{c} v_F \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) \sigma^z, \check{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n)] \\ &= \left[\begin{pmatrix} i\omega_n + \frac{e}{c} v_F \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) & -\Delta(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) \\ \bar{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) & -i\omega_n - \frac{e}{c} v_F \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) \end{pmatrix}, \check{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) \right] \end{aligned} \quad (2.143)$$

となり、準古典 Green 関数に関する運動方程式が得られた。これが、Eilenberger 方程式である。

2.8 Eilenberger 方程式の規格化条件

Eilenberger 方程式より、

$$\begin{aligned} -iv_F \cdot \nabla (\check{g}\check{g}) &= -iv_F \cdot (\nabla \check{g}\check{g} + \check{g}\nabla \check{g}) \\ &= [i\omega_n \sigma^z - \check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) + \frac{e}{c} v_F \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) \sigma^z, \check{g}\check{g}] \end{aligned} \quad (2.144)$$

となり、 $\check{g}\check{g}$ も Eilenberger 方程式の解となっていることが解る。従って、

$$\begin{aligned} \check{g}\check{g} &= \begin{pmatrix} gg - f\bar{f} & f(g - \bar{g}) \\ -\bar{f}(g - \bar{g}) & \bar{g}\bar{g} - f\bar{f} \end{pmatrix} \\ &= A\check{I} + B\check{g} \end{aligned} \quad (2.145)$$

と表すことができる。ただし、 A, B は const である。

ここで、 A, B を決定するために、十分遠方に於いて系が空間的に一様かつ $A = 0$ という状態に連続的に移行する、という境界条件を課す。この場合の Gor'kov 方程式は、

$$\begin{pmatrix} i\omega_n - \xi_p & -\Delta \\ \bar{\Delta} & -i\omega_n - \xi_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(\mathbf{p}; i\omega_n) & F(\mathbf{p}; i\omega_n) \\ -\bar{F}(\mathbf{p}; i\omega_n) & -\bar{G}(\mathbf{p}; i\omega_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.146)$$

となり、これを解くと、

$$G(\mathbf{p}, i\omega_n) = -\frac{i\omega_n + \xi_p}{\omega_n^2 + \xi_p^2 + |\Delta|^2} \quad (2.147)$$

$$\bar{G}(\mathbf{p}, i\omega_n) = -\frac{i\omega_n - \xi_p}{\omega_n^2 + \xi_p^2 + |\Delta|^2} \quad (2.148)$$

$$F(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{\Delta}{\omega_n^2 + \xi_p^2 + |\Delta|^2} \quad (2.149)$$

$$\bar{F}(\mathbf{p}, i\omega_n) = \frac{\bar{\Delta}}{\omega_n^2 + \xi_p^2 + |\Delta|^2} \quad (2.150)$$

となる。これから準古典 Green 関数を求めると、

$$g(\hat{\mathbf{p}}, i\omega_n) = -\oint \frac{d\xi_p}{\pi i} \frac{i\omega_n + \xi_p}{\omega_n^2 + \xi_p^2 + |\Delta|^2} = -\frac{\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \quad (2.151)$$

$$\bar{g}(\hat{\mathbf{p}}, i\omega_n) = -\oint \frac{d\xi_p}{\pi i} \frac{i\omega_n - \xi_p}{\omega_n^2 + \xi_p^2 + |\Delta|^2} = -\frac{\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \quad (2.152)$$

$$f(\hat{\mathbf{p}}, i\omega_n) = -\oint \frac{d\xi_p}{\pi i} \frac{\Delta}{\omega_n^2 + \xi_p^2 + |\Delta|^2} = -\frac{i\Delta}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \quad (2.153)$$

$$\bar{f}(\hat{\mathbf{p}}, i\omega_n) = -\oint \frac{d\xi_p}{\pi i} \frac{\bar{\Delta}}{\omega_n^2 + \xi_p^2 + |\Delta|^2} = -\frac{i\bar{\Delta}}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \quad (2.154)$$

となり、

$$\check{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) \check{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = \check{1} \quad (2.155)$$

が導かれる。これが Eilenberger 方程式の規格化条件である。

ただし、2.6.1 で述べたように、準古典 Green 関数を定義する際に πi で割っていない場合は、

$$\check{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) \check{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = -\pi^2 \check{1} \quad (2.156)$$

となることに注意する必要がある。

Eq.(2.143) は、

$$-iv_F \cdot \nabla g(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) + \bar{\Delta} f(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) - \Delta \bar{f}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = 0 \quad (2.157)$$

$$iv_F \cdot \nabla \bar{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) - \bar{\Delta} f(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) + \Delta \bar{f}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = 0 \quad (2.158)$$

$$-\left\{ iv_F \cdot \left(\nabla - \frac{2ie}{c} \mathbf{A} \right) + 2i\omega_n \right\} f(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) - \Delta \{ g(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) + \bar{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) \} = 0 \quad (2.159)$$

$$\left\{ iv_F \cdot \left(\nabla + \frac{2ie}{c} \mathbf{A} \right) - 2i\omega_n \right\} \bar{f}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) - \bar{\Delta} \{ g(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) + \bar{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) \} = 0 \quad (2.160)$$

の4個の方程式から成っている。

ここで、規格化条件から $g = \bar{g}$ なので、Eq.(2.157) と Eq.(2.158) が等価なのは明らかである。

また、Eq.(2.160) は規格化条件及び準古典 Green 関数の対称性より、

$$\begin{aligned} & \left\{ iv_F \cdot \left(\nabla + \frac{2ie}{c} \mathbf{A} \right) - 2i\omega_n \right\} \bar{f}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) - \bar{\Delta} \{ g(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) + \bar{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) \} \\ &= - \left\{ iv_F \cdot \left(\nabla + \frac{2ie}{c} \mathbf{A} \right) - 2i\omega_n \right\} f^*(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; -i\omega_n) + 2\bar{\Delta} g^*(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; -i\omega_n) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.161)$$

となり、複素共役を取ると、

$$\left\{ iv_F \cdot \left(\nabla - \frac{2ie}{c} \mathbf{A} \right) - 2i\omega_n \right\} f(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; -i\omega_n) + 2\Delta g(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; -i\omega_n) = 0 \quad (2.162)$$

となり、さらに

$$-i\omega_n = i\omega_m \quad (2.163)$$

と置換することで、Eq.(2.159) と同等の式が得られる。つまり、Eilenberger 方程式に於いて、等価な方程式は2個のみであり、この等価性は particle-hole symmetry に起因している。

2.9 Riccati Formalism

Eilenberger 方程式を Riccati 形式に書き換えることで、非線形微分方程式の解を線形微分方程式を解くことで得られる。

Pauli 行列を用いて行列 K_{\pm} 、 K_3 を

$$\begin{aligned} K_+ &\equiv -\frac{i}{2}(\sigma^x + i\sigma^y) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.164)$$

$$\begin{aligned} K_- &\equiv -\frac{i}{2}(\sigma^x - i\sigma^y) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.165)$$

$$\begin{aligned} K_3 &\equiv \frac{1}{2}\sigma^z \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.166)$$

と定義する。これらは、

$$[K_+, K_-] = -2K_3 \quad (2.167)$$

$$[K_3, K_{\pm}] = \pm K_{\pm} \quad (2.168)$$

という交換関係を満たし、また、

$$[K_3, e^{CK_{\pm}}] = \pm CK_{\pm} e^{CK_{\pm}} \quad (2.169)$$

$$[K_{\pm}, e^{CK_3}] = (e^{\mp C} - 1) e^{CK_3} K_{\pm} \quad (2.170)$$

$$[K_+, e^{CK_-}] = -2Ce^{CK_-} K_3 + C^2 K_- e^{CK_-} \quad (2.171)$$

$$[K_-, e^{CK_+}] = 2Ce^{CK_+} K_3 + C^2 K_+ e^{CK_+} \quad (2.172)$$

という関係式が成り立つ。ただし、 C は const である。

K_{\pm} 、 K_3 を用いると、Eilenberger 方程式は、

$$\begin{aligned} -iv_F \cdot \nabla \check{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) &= \left[\begin{pmatrix} i\omega_n + \frac{e}{c} v_F \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) & -\Delta(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) \\ \bar{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) & -i\omega_n - \frac{e}{c} v_F \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) \end{pmatrix}, \check{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) \right] \\ &= [2i\bar{\omega}_n K_3 - i\Delta K_+ + i\bar{\Delta} K_-, \check{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n)] \end{aligned} \quad (2.173)$$

と表せる。ただし、簡易の為、

$$i\bar{\omega}_n \equiv i\omega_n + \frac{e}{c} v_F \cdot \mathbf{A}(\mathbf{R}) \quad (2.174)$$

と定義している。

今、

$$-iv_F \cdot \nabla \hat{Y} = (2i\bar{\omega}_n K_3 - i\Delta K_+ + i\bar{\Delta} K_-) \hat{Y} \quad (2.175)$$

という微分方程式を満たす 2×2 行列の関数 \hat{Y} を導入する。この \hat{Y} を用いると、規格化も含めて \check{g} は、

$$\check{g} = -\hat{Y} \cdot 2K_3 \cdot [\hat{Y}]^{-1} \quad (2.176)$$

と書くことができる。

ここで、

$$\hat{Y} \equiv e^{a_+ K_+} e^{a_3 K_3} e^{a_- K_-} \quad (2.177)$$

と置くと、

$$\check{g} = -\{1 - 2a_- a_+ e^{-a_3}\} 2K_3 - a_+ \{a_- a_+ e^{-a_3} - 1\} 2K_+ - a_- e^{-a_3} 2K_- \quad (2.178)$$

と書ける。また、 \hat{Y} に関する微分方程式から、

$$\nabla a_+ = -\frac{1}{v_F} (\bar{\Delta} a_+^2 + 2\bar{\omega}_n a_+ - \Delta) \quad (2.179)$$

$$\nabla a_3 = -\frac{2}{v_F} (\bar{\Delta} a_+ + \bar{\omega}_n) \quad (2.180)$$

$$\nabla a_- = -\frac{1}{v_F} e^{a_3} \bar{\Delta} \quad (2.181)$$

という関係式が得られる。従って、解くべき微分方程式は、 a_+ に関する Riccati 方程式、

$$v_F \nabla a_+ + \{2\bar{\omega}_n + \bar{\Delta} a_+\} a_+ - \Delta = 0 \quad (2.182)$$

のみとなる。この方程式を解いて、 a_+ を求め、Eq.(2.180) と Eq.(2.181) から、積分することで、

$$a_3(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = -\frac{2}{v_F} \left[\bar{\omega}_n \mathbf{R} + \int_0^{\mathbf{R}} \bar{\Delta} a_+ d\mathbf{R}' \right] + a_3(\hat{\mathbf{p}}, 0; i\omega_n) \quad (2.183)$$

$$a_-(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = -\frac{1}{v_F} \int_0^{\mathbf{R}} \bar{\Delta} e^{a_3} d\mathbf{R}' + a_-(\hat{\mathbf{p}}, 0; i\omega_n) \quad (2.184)$$

と、 a_3 と a_- を求めることができ、最終的に \check{g} を導くことができる。

2.10 Explosion Trick

前節では Riccati 方程式を用いて \check{g} を導いたが、explosion trick を用いることで、より簡単に \check{g} を導くことができる。

Eilenberger 方程式の或る 2 個の解を \check{g}_+ 、 \check{g}_- とする。 \check{g}_\pm が物理的な解となる条件（発散しない等）や規格化条件を満たしていなくても、それらの交換関係が物理的な解となり、規格化条件を満たすことがある。このように、

$$\check{g} = \check{g}_+\check{g}_- - \check{g}_-\check{g}_+ \quad (2.185)$$

を Eilenberger 方程式の解として採用する方法を explosion trick と呼ぶ。

今、前節の結果を利用して、

$$\begin{aligned} \check{g}_A &\equiv \hat{Y}_A \cdot K_- \cdot [\hat{Y}_A]^{-1} \\ &= e^{-a_3}(K_- - 2a_+K_3 + a_+^2K_+) \end{aligned} \quad (2.186)$$

$$\begin{aligned} \check{g}_B &\equiv \hat{Y}_B \cdot K_+ \cdot [\hat{Y}_B]^{-1} \\ &= e^{b_3}(K_+ - 2b_-K_3 + b_-^2K_-) \end{aligned} \quad (2.187)$$

$$\hat{Y}_A \equiv e^{a_+K_+}e^{a_3K_3}e^{a_-K_-} \quad (2.188)$$

$$\hat{Y}_B \equiv e^{b_-K_-}e^{b_3K_3}e^{b_+K_+} \quad (2.189)$$

と定義すると、 \check{g}_A 、 \check{g}_B は Eilenberger 方程式の解となっている。ここで、 a_\pm 、 a_3 は前述の方程式を満たしている。また、 b_\mp 、 b_3 も前節と同様にすることで、

$$\nabla b_- = \frac{1}{v_F}(\Delta b_-^2 + 2\bar{\omega}_n b_- - \bar{\Delta}) \quad (2.190)$$

$$\nabla b_3 = -\frac{2}{v_F}(\Delta b_- + \bar{\omega}_n) \quad (2.191)$$

$$\nabla b_+ = \frac{1}{v_F}e^{-b_3}\Delta \quad (2.192)$$

という関係式が得られる。そして、 b_- に関する Riccati 方程式、

$$v_F \nabla b_- - \{2\bar{\omega}_n + \Delta b_-\} b_- + \bar{\Delta} = 0 \quad (2.193)$$

を解くことで b_- が求まり、

$$b_3(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = -\frac{2}{v_F} \left[\bar{\omega}_n + \int_0^{\mathbf{R}} \Delta b_- d\mathbf{R}' \right] + b_3(\hat{\mathbf{p}}, 0, ; i\omega_n) \quad (2.194)$$

$$b_+(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = \frac{1}{v_F} \int_0^{\mathbf{R}} \Delta e^{-b_3} d\mathbf{R}' + b_+(\hat{\mathbf{p}}, 0, ; i\omega_n) \quad (2.195)$$

と積分することで、 b_3 、 b_+ を求めることができる。

ここで、

$$b_-(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n) = -\frac{1}{a_+(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; i\omega_n)} \quad (2.196)$$

という関係を仮定すると、 a_+ に関する Riccati 方程式と b_- に関する Riccati 方程式はほとんど同じ形になる。実際、 a_+ と b_- の解の符号を対応するように選べば、上式の関係が成り立つ。

ここでは、 \check{g}_A 、 \check{g}_B という解を考えたが、これらの解が有効な解である保証はない。実際、 \check{g}_A 、 \check{g}_B は規格化条件を満たしていない。従って、explosion trick を用いて、

$$\begin{aligned} \check{g} &= [\check{g}_A, \check{g}_B] \\ &\equiv g_3 2K_3 + g_+ K_+ - g_- K_- \end{aligned} \quad (2.197)$$

を解として採用することにする。ただし、

$$g_3 = [1 - a_+ b_-][1 + a_+ b_-] e^{b_3 - a_3} \quad (2.198)$$

$$g_+ = -2a_+[1 + a_+ b_-] e^{b_3 - a_3} \quad (2.199)$$

$$g_- = -2b_-[1 + a_+ b_-] e^{b_3 - a_3} \quad (2.200)$$

である。この \check{g} の規格化条件は、

$$\begin{aligned} \check{g} \cdot \check{g} &= [g_3 g_3 + g_+ g_-] \cdot \check{1} \\ &= [1 + a_+ b_-]^4 e^{2b_3 - 2a_3} \cdot \check{1} \\ &= \check{1} \end{aligned} \quad (2.201)$$

より、

$$[1 + a_+ b_-]^2 e^{b_3 - a_3} = \pm 1 \quad (2.202)$$

となる。ここで、複合は一様な場合の準古典 Green 関数の符号と合うように決める。以上より、規格化も含めて g_3 、 g_{\pm} は、

$$g_3 = \pm \frac{1 - a_+ b_-}{1 + a_+ b_-} \quad (2.203)$$

$$g_+ = \mp \frac{2a_+}{1 + a_+ b_-} \quad (2.204)$$

$$g_- = \mp \frac{2b_-}{1 + a_+ b_-} \quad (2.205)$$

と導かれる。これより、 a_+ と b_- の各々に関する Riccati 方程式を解くことで、さらに積分して a_- 等を求めることなく、Eilenberger 方程式の解を得られることになる。

ここで、系が空間的に一様かつ $A = 0$ という状態を考える。この時、2 個の Riccati 方程式は、

$$\bar{\Delta}a_+^2 + 2\omega_n a_+ - \Delta = 0 \quad (2.206)$$

$$\Delta b_-^2 + 2\omega_n b_- - \bar{\Delta} = 0 \quad (2.207)$$

となり、これらを解くと、

$$a_+ = \frac{\Delta}{\omega_n + \sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \quad (2.208)$$

$$b_- = \frac{\bar{\Delta}}{\omega_n + \sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \quad (2.209)$$

となる。従って、

$$g_3 = \pm \frac{\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \quad (2.210)$$

$$g_+ = \mp \frac{\Delta}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \quad (2.211)$$

$$g_- = \mp \frac{\bar{\Delta}}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \quad (2.212)$$

となるが、Eq.(2.151) - Eq.(2.154) と比較すれば下符号を選択すれば良いことが解る。これより、準古典 Green 関数は、

$$\check{g} = -\frac{1}{\sqrt{\omega_n^2 + |\Delta|^2}} \begin{pmatrix} \omega_n & i\Delta \\ -i\bar{\Delta} & -\omega_n \end{pmatrix} \quad (2.213)$$

と導かれる。

さらに、これを基にすることで、空間的に一様かつ磁場 B が掛かった系の準古典 Green 関数は、

$$\check{g} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\omega_n^+}{\sqrt{\omega_n^{+2} + |\Delta|^2}} + \frac{\omega_n^-}{\sqrt{\omega_n^{-2} + |\Delta|^2}} \right) & i\Delta \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_n^{+2} + |\Delta|^2}} + \frac{1}{\sqrt{\omega_n^{-2} + |\Delta|^2}} \right) \\ -i\bar{\Delta} \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_n^{+2} + |\Delta|^2}} + \frac{1}{\sqrt{\omega_n^{-2} + |\Delta|^2}} \right) & - \left(\frac{\omega_n^+}{\sqrt{\omega_n^{+2} + |\Delta|^2}} + \frac{\omega_n^-}{\sqrt{\omega_n^{-2} + |\Delta|^2}} \right) \end{pmatrix} \quad (2.214)$$

と導かれる。ただし、

$$\omega_n^\pm = \omega_n \pm i\mu H \quad (2.215)$$

である。

2.11 Gauge Transformation

FFLO 状態の場合、modulation が存在するので、空間的に一様ではない。しかし、Gauge Transformation を用いることで、前節で求めた空間的に一様な系の解を一般化することができる。

例えば FF 状態の場合、pair-potential は??節で述べたように、

$$\Delta_{\text{FF}}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) = \mathcal{Y}(\hat{\mathbf{p}})\Delta_0 \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}) \quad (2.216)$$

の様に空間変調している。この場合、Eq.(2.215) を

$$\omega_n^\pm \rightarrow \omega_n^\pm + i\frac{1}{2}v_F \cdot \mathbf{q} = \omega_n \pm i\mu H + i\frac{1}{2}v_F \cdot \mathbf{q} \quad (2.217)$$

と置き換えることで、解を求めることができ、準古典 Green 関数は、

$$\check{g}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; \omega_n) \rightarrow \check{U}(\mathbf{R})\check{g}(\hat{\mathbf{p}}; \omega_n)\check{U}^\dagger(\mathbf{R}) \quad (2.218)$$

の Gauge Transformation に依り得られる。ただし、

$$\check{U}(\mathbf{R}) = \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}K_3) \quad (2.219)$$

である。

さらに 2.4 節で一様かつゼロ磁場での gap 方程式を求めた方法を用いることで、

$$\Delta(\mathbf{R}) \ln \frac{T}{T_{c0}} = \beta^{-1} \sum_n \left\langle \mathcal{Y}^*(\hat{\mathbf{p}}) \left[f(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}; \omega_n) - \frac{\pi \Delta(\mathbf{R}) \mathcal{Y}(\hat{\mathbf{p}})}{|\omega_n|} \right] \right\rangle_{\text{FS}} \quad (2.220)$$

という gap 方程式が得られる。ただし、 $\langle \rangle_{\text{FS}}$ は FS 上での角度平均である。

これを解くことで超伝導転移線を求めることができる。

FF 状態や LO 状態といった異なる状態の安定性を比較する場合は、Luttinger-Ward 汎関数を用いて、自由エネルギー

$$F_S(H, T) - F_N(H, T) = \int d\mathbf{R} \frac{1}{2} \int_0^1 d\lambda T \sum_{\omega_n} N_F \int \frac{d\hat{\mathbf{p}}}{2\pi} \text{Tr} \check{\Delta} \left(\check{g}_\lambda - \frac{1}{2} \check{g} \right) \quad (2.221)$$

を計算することになる。ここで、 N_F は常伝導状態の Fermi レベルでの状態密度である。また、 \check{g}_λ は Eq.(2.143) を無次元量の coupling parameter, $0 \leq \lambda \leq 1$ でスケールした輸送方程式、

$$[i\omega_n \sigma^z - \lambda \check{\Delta}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{R}) - \check{v}, \check{G}_\lambda] + iv_F \cdot \nabla \check{G}_\lambda = 0 \quad (2.222)$$

を解くことに依って得られる補助伝播関数である。これによって求められた自由エネルギーを比較することで、FF 状態等への転移線を求めることができる。

2.12 Ginzburg-Landau 方程式

Eq.(2.220) を用いて、Eq.(2.143) を f に関して Δ で展開することで、自由エネルギー、

$$\Delta F \simeq \sum_{\mathbf{q}} a(T, \mathbf{q}) |\Delta_{\mathbf{q}}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4} b(T, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \Delta_{\mathbf{q}_1}^* \Delta_{\mathbf{q}_2}^* \Delta_{\mathbf{q}_3} \Delta_{\mathbf{q}_4} \quad (2.223)$$

を近似的に求めることができる。これを Ginzburg-Landau (GL) 方程式と呼ぶ。ここで、GL 方程式の 2 次項の係数は、

$$a(T, \mathbf{q}) = \ln \frac{T}{T_{c0}} - 2\pi\beta^{-1} \sum_{\omega_n > 0} \text{Re} \left\langle \left[|\mathcal{Y}(\hat{\mathbf{p}})|^2 \left(\frac{1}{\omega_n + i\eta_{\mathbf{q}}} - \frac{1}{\omega_n} \right) \right] \right\rangle_{\text{FS}} \quad (2.224)$$

で表され、4 次項の係数は、

$$\begin{aligned} & b(T, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \\ &= 2\pi\beta^{-1} \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{2} \text{Re} \left\langle \left[|\mathcal{Y}(\hat{\mathbf{p}})|^4 \frac{\omega_n + i(\eta_{\mathbf{q}_1} + \eta_{\mathbf{q}_2} + \eta_{\mathbf{q}_3} + \eta_{\mathbf{q}_4})/4}{(\omega_n + i\eta_{\mathbf{q}_1})(\omega_n + i\eta_{\mathbf{q}_2})(\omega_n + i\eta_{\mathbf{q}_3})(\omega_n + i\eta_{\mathbf{q}_4})} \right] \right\rangle_{\text{FS}} \end{aligned} \quad (2.225)$$

で表される。ただし、

$$\eta_{\mathbf{q}} = \mu H + \frac{1}{2} v_F \cdot \mathbf{q} \quad (2.226)$$

である。

これに Eq.(1.3) 及び Eq.(1.2) を代入することで、超伝導転移線近傍の自由エネルギー、

$$\Delta F_{\text{FF}} = -\frac{2a^2}{2(b_1 + 2b_{12})} \quad (2.227)$$

$$\Delta F_{\text{LO}} = -\frac{2a^2}{b_1 + 2b_{12} + 2b_{13} + 2b_{14} + 2b_{1234}} \quad (2.228)$$

が求まり、超伝導転移線を求めることができる。ただし、 $b_1 = b(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1)$ 、 $b_{ij} = b(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j, \mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)$ 、 $b_{1234} = b(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)$ 、という表記を用いてる。

空間変調の効果を視覚化するために、薄膜での modulation $\mathbf{q} = (q_x, \frac{\pi}{D}, 0)$ を代入し、 ρ 値を用いて $H = 0$ の時の Eq.(2.224) を書き直すと、

$$\begin{aligned} & a(T, \mathbf{q}, H = 0) \\ &= \ln \frac{T}{T_{c0}} + \left\langle |\mathcal{Y}(\hat{p})|^2 \frac{2\pi\beta^{-1}}{\sinh(2\pi\beta^{-1}\rho)} \left\{ 1 - \cos(\rho v_F \hat{p}_x q_x) \cos\left(\rho v_F \hat{p}_y \frac{\pi}{D}\right) \right\} \right\rangle_{\text{FS}} \end{aligned} \quad (2.229)$$

となる。

Eq.(2.229)を見ると $\sinh(2\pi\beta^{-1}\rho)$ の形で ρ 値が分母に含まれている。このため、高温では小さい ρ 値のみが有効だが、低温では大きい ρ 値も効いてくる。

ここで、 $\cos(\rho v_F \hat{p}_y \frac{\pi}{D})$ の項は広い範囲の ρ 値に対して、負の値を取る。その結果、 $a(T, \mathbf{q}, H = 0)$ が負の値を取るには、 $\cos(\rho v_F \hat{p}_x q_x)$ の項も負の値を取る必要があり、必然的に有限の q_x を持つ状態が好まれる。しかし、 p_y が有限の値を持つ時に $\mathcal{V}(\hat{p})$ が消える場合、境界条件から導かれた $\cos(\rho v_F \hat{p}_y \frac{\pi}{D})$ の項が意味をなさなくなり、有限の q_x を持った状態は出現しなくなる。これが”D_{xy} 波”や P_y 波でのみ薄膜 FFLO 状態が出現するメカニズムである。

従来の FFLO 状態が出現するメカニズムと比較すると、 $v_F \hat{p}_y \frac{\pi}{D}$ が磁場と同様の働きをしていることになるが、これは Eq.(2.217) や Eq.(2.226) に於いて、 $v_F \cdot \mathbf{q}$ が H と同等に扱われていることから窺える。そして、同等に扱った結果、超伝導薄膜に磁場をかけた場合、 $\cos(\rho v_F \hat{p}_y \frac{\pi}{D})$ の項は $\cos(\rho v_F \hat{p}_y \frac{\pi}{D}) \cos(\rho 2\mu H)$ と置き換えられ、2つの \cos 関数が競合することになる。つまり、薄膜化に伴うサイズ効果が超伝導転移を抑制する一方で、超伝導薄膜に掛けられた磁場の増加は超伝導転移を促進し、正反対の効果が競合することで特異な相図になることが期待される。

Eq.(1.3) 及び Eq.(1.2) を代入すると、GL 方程式の二次項は、

$$a(T, \mathbf{q})_{\text{FFLO}} |\Delta_q|^2 = \frac{1}{2} |\Delta_0|^2 \left[\ln \frac{T}{T_{c0}} + \left\langle |\mathcal{Y}(\hat{p})|^2 \frac{2\pi\beta^{-1} \cos(2H\rho)}{\sinh(2\pi\beta^{-1}\rho)} \left\{ 1 - \cos(\rho v_F \hat{p}_x q_x) \cos\left(\rho v_F \hat{p}_y \frac{\pi}{D}\right) \right\} \right\rangle_{\text{FS}} \right] \quad (2.230)$$

と、FF 状態と LO 状態で同じ値になり、超伝導転移線が一致することが解る。

これに対し、GL 方程式の四次項は、

$$b_{\text{FF}} |\Delta_q|^4 = \frac{1}{4} |\Delta_0|^4 \left\langle |\mathcal{Y}(\hat{p})|^4 \frac{2\pi\beta^{-1} \cos(2H \sum_i \rho_i)}{\sinh(2\pi\beta^{-1} \sum_i \rho_i)} \times \left\{ \cos\left(v_F \hat{p}_x q_x \sum_i \rho_i\right) \right\} \times \left\{ \cos\left(v_F \hat{p}_y \frac{\pi}{D} \sum_i \rho_i\right) + \cos\left(v_F \hat{p}_y \frac{\pi}{D} (\rho_1 + \rho_2 - \rho_3)\right) + \cos\left(v_F \hat{p}_y \frac{\pi}{D} (\rho_1 - \rho_2 - \rho_3)\right) \right\} \right\rangle_{\text{FS}} \quad (2.231)$$

$$b_{\text{LO}} |\Delta_q|^4 = \frac{1}{4} |\Delta_0|^4 \left\langle |\mathcal{Y}(\hat{p})|^4 \frac{2\pi\beta^{-1} \cos(2H \sum_i \rho_i)}{\sinh(2\pi\beta^{-1} \sum_i \rho_i)} \times \left\{ \cos\left(v_F \hat{p}_x q_x \sum_i \rho_i\right) + \cos(v_F \hat{p}_x q_x (\rho_1 + \rho_2 - \rho_3)) + \cos(v_F \hat{p}_x q_x (\rho_1 - \rho_2 - \rho_3)) \right\} \times \left\{ \cos\left(v_F \hat{p}_y \frac{\pi}{D} \sum_i \rho_i\right) + \cos\left(v_F \hat{p}_y \frac{\pi}{D} (\rho_1 + \rho_2 - \rho_3)\right) + \cos\left(v_F \hat{p}_y \frac{\pi}{D} (\rho_1 - \rho_2 - \rho_3)\right) \right\} \right\rangle_{\text{FS}} \quad (2.232)$$

と、FF 状態と LO 状態で異なった値になり、安定性に差が生まれることが解る。

特筆する程でもないが、この差は FF 状態と LO 状態とで x 軸方向の空間変調に違いがあることに起因している。FF 状態では q_x しかなく、 $q_{1,2} = \{(q_x, Q_y), (q_x, -Q_y)\}$ の2つの縮退した状態が存在し、superflow として現れる。これに対し、LO 状態では q_x と $-q_x$ の2つが存在し、 $q_{1,2,3,4} = \{(q_x, Q_y), (q_x, -Q_y), (-q_x, Q_y), (-q_x, -Q_y)\}$ の4つの縮退した状態が存在し、OP の大きさの振動として現れる。この結果が Eq.(2.231) 及び Eq.(2.232) の3行目、 $\cos(v_F \hat{p}_x q_x \sum_i \rho_i)$ 以降に現れている。言い換えると、3行目以外は完全に一致しており、FF 状態と LO 状態の磁場応答は似たものになると推測できる。

第3章 計算結果と考察

この章では前章で求めた数式を数値解析した結果とその考察について述べる。ただし、以下では温度 T は T_{c0} で、磁場 B は $\frac{T_{c0}}{\mu_B}$ で、x 軸（フィルム面に並行）方向の運動量 $|q_x|$ は $\frac{1}{\xi_0}$ で、オーダーパラメータ $|\Delta|$ は T_{c0} でスケールしている。また、 d は

$$d = \frac{D}{\pi \xi_0} \quad (3.1)$$

であり、膜厚 D をコヒーレンス長 $\xi_0 = \frac{v_F}{2\pi T_{c0}}$ を用いてスケールしている。

3.1 GL 方程式に依る数値解析

K. Aoyama 等の計算結果 [26] を元に、“ D_{xy} 波” に磁場を加えた場合の薄膜 FFLO について GL 方程式を用いて計算した結果が Fig.3.1 である。ここで、横軸は t 、縦軸は d^{-1} であり、 $D = 6\xi_0 \sim 10\xi_0$ ぐらいの膜厚で薄膜 FFLO が出現する結果となっている。また、転移は全て二次転移になっていることを確認した。

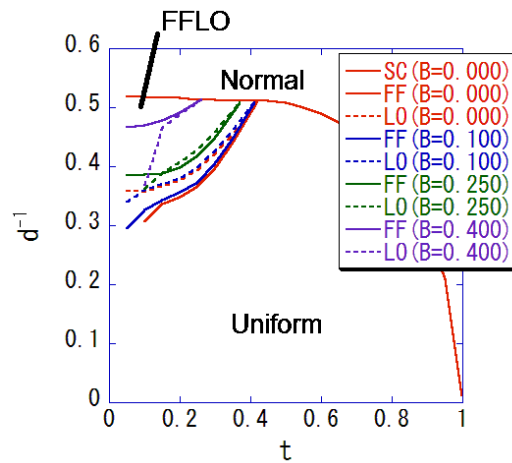


Fig. 3.1: GL 方程式で求めた “ D_{xy} ” 波の t - d 相図

磁場を加えることで、薄膜 FF 状態及び薄膜 LO 状態が抑制され、薄膜側 (d^{-1} が大きい側) へ領域が縮小していることが解る。

また、 $B = 0.10$ の場合では薄膜 FF 状態の方が安定している。しかし、 $B = 0.25$ になると、 $t = 0.15$ 以下では安定性が逆転し薄膜 LO 状態の方が安定している。さらに磁場を $B = 0.40$ まで強くすると、 $t = 0.25$ 以下の全域で薄膜 LO 状態の方が安定となっている。

Fig.1.12 に示した Aoyama 等の計算結果と比較すると、磁場を加えたことに依って薄膜 FF 状態が抑制される様子は似ている。しかし、Aoyama 等が指摘したような一次転移は発見できなかった。

また、磁場を加えたことに依る安定性の逆転は Aoyama 等の示唆と一致している。しかし、 $B = 0.40$ の場合、薄膜 LO 転移線が $t = 0.15$ 以下で不自然に急落しているのが見て取れる。GL 方程式は近似式であり、低温領域では精度に疑問が持たれる。これに起因して薄膜 LO 転移線の急落が起きている可能性を考慮し、低温領域でも成り立つ Eilenberger 方程式を用いて再解析することにした。

3.2 Eilenberger 方程式に依る数値解析

3.2.1 t-d グラフ

” D_{xy} 波”の薄膜 FFLO について Eilenberger 方程式を用いて再計算した。

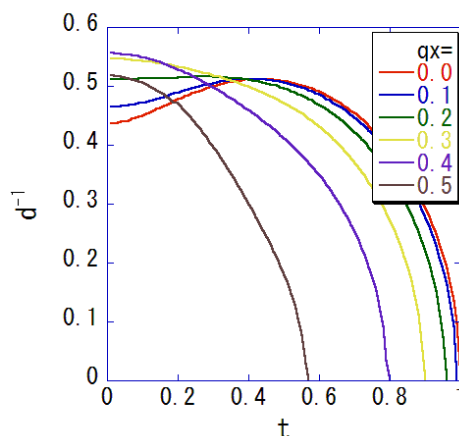


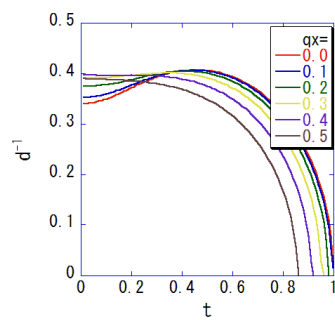
Fig. 3.2: ” D_{xy} ” 波の $B = 0$ に於ける各 q_x での超伝導転移膜厚

$B = 0$ に於ける各 q_x での超伝導転移膜厚をプロットした結果が Fig.3.2 であり、横軸は t 、縦軸は d^{-1} となっている。低温域では $q_x \neq 0.0$ の方が超伝導転移する d^{-1} が大きくなっており、薄膜 FFLO 状態が出現することが確認された。

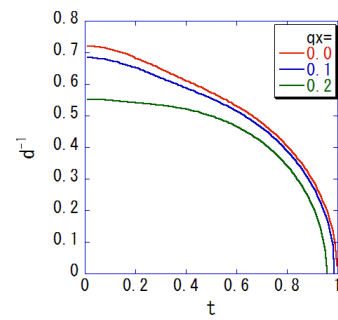
実際の超伝導転移線は、これらの曲線群の包絡線として得られる（以下の Fig.3.4 参照）。

参考として、 P_y 波・” $D_{x^2y^2}$ 波”・ P_x 波・S 波の場合の結果を Fig.3.3 に掲載する。ただし、” $D_{x^2y^2}$ 波”・ P_x 波・S 波に関しては 1.4 節で述べたようなサイズ効果を \cos 関数で近似する条件を満たしていない。ここでの計算結果は近似が成り立つと仮定した場合のものであり、傾向を把握する程度の意味しか持たないことに注意してもらいたい。

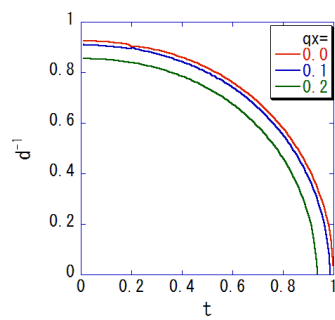
Fig.3.3 を見ての通り、 P_y 波では ” D_{xy} 波” 同様に薄膜 FFLO 状態が出現するのに対し、” $D_{x^2y^2}$ 波”・ P_x 波・S 波の場合は薄膜 FFLO 状態が出現しないことが判明した。これは 2.12 節で述べたように、ギャップノードの方向が薄膜 FFLO 状態出現のメカニズムに深く関連しているからである。



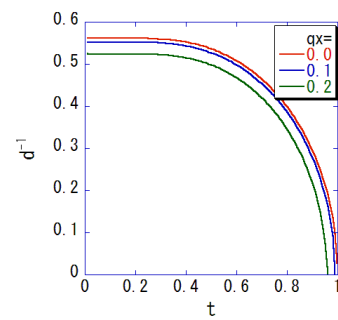
(a) P_y 波



(b) " $D_{x^2-y^2}$ 波"



(c) P_x 波



(d) S 波

Fig. 3.3: 各波の $B = 0$ に於ける各 q_x での超伝導転移膜厚

” D_{xy} 波”及び P_y 波のゼロ磁場に於ける薄膜 FFLO 転移線をプロットした結果が Fig.3.4 である。 P_y 波に於いても” D_{xy} 波”と同様に転移は全て二次転移であること、薄膜 FF 状態の方が安定であることが確認された。また、低温域に於ける超伝導転移線はどちらも非一様な振る舞いをするが、” D_{xy} 波”と P_y 波とで様子が異なることが解る。

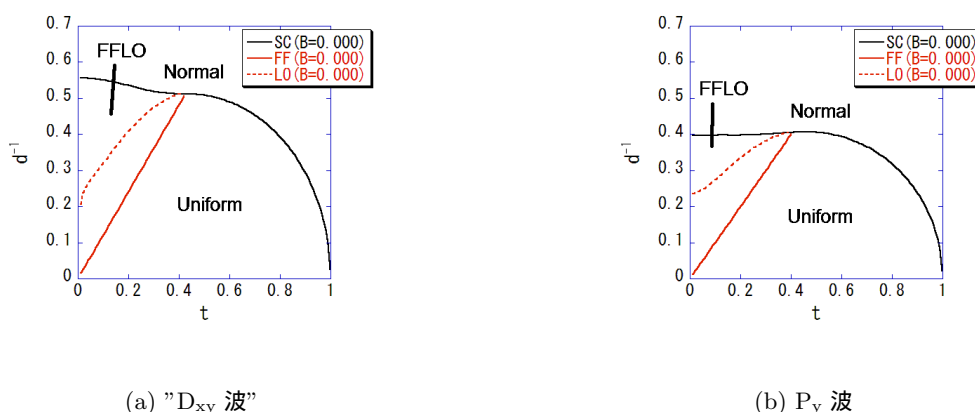


Fig. 3.4: ” D_{xy} 波”及び P_y 波のゼロ磁場に於ける薄膜 FFLO 転移線

Fig.1.11 に示した” D_{xy} 波”のゼロ磁場に於ける A.B.Vorontsov の計算結果と比較すると薄膜 LO 転移線は低温域で少しずれているが、薄膜 FF 転移線及び超伝導転移線は完全に一致していることが解る。

” D_{xy} 波”各磁場に於ける薄膜 FFLO 転移線をプロットした結果が Fig.3.5 である。転移は全て二次転移になっていることを確認した。

Fig.3.5 を見ると、GL 方程式を解いた時と同様に、磁場を加えることで薄膜 FF 状態及び薄膜 LO 状態が抑制され、薄膜側 (d^{-1} が大きい側) へ領域が縮小していることが解る。しかし、GL 方程式を解いた時とは異なり、薄膜 LO 転移線の急落は見られず、常に薄膜 FF 状態の方が安定で、安定性の逆転が起きないことが確認された。これにより、当初の期待とは異なり、磁場の増加による薄膜 FF 状態から従来型 LO 状態への直接の転移は起きないことが確認された。

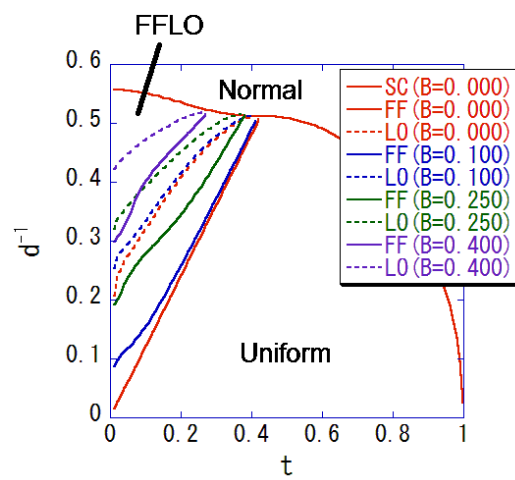


Fig. 3.5: "D_{xy} 波" の各磁場に於ける薄膜 FFLO 転移線

各磁場に於ける超伝導転移線をプロットした結果が Fig.3.6 である。

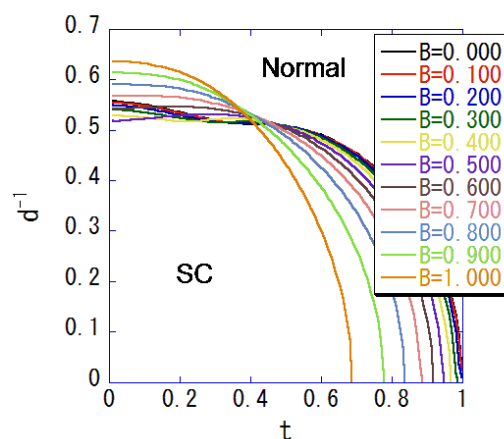


Fig. 3.6: "D_{xy} 波" の各磁場に於ける超伝導転移線

$t \geq 0.49$ では磁場を強くすると超伝導転移する膜厚が大きくなっている。しかし、 $t < 0.49$ ではこの関係が成り立っていない。例えば、 $t < 0.10$ の時、 $B \leq 0.50$ では磁場を強くすると超伝導転移する d^{-1} が大きくなり、 $B \geq 0.50$ では d^{-1} が小さくなっている。薄膜 FF 状態は $B = 0.501$ で消滅することから、薄膜 FF 状態に転移することで磁場の影響を打ち消し、超伝導転移する d^{-1} を小さく押さえ込んでいるのだと推測できる。その結果として、低磁場では超伝導転移線は温度変化に対して非一様に振る舞い、 $t = 0.35 \sim 0.4$ 付近で超伝導転移線は平坦になっている。この磁場に対して非等方的な薄膜 FF 状態と、等方的な従来型 LO 状態との競合が本論文の焦点であり、3.2.3 節で詳しく述べることにする。

3.2.2 t-B グラフ

$d^{-1}=0.000$ & 0.050 に於ける "D_{xy} 波" の相図が Fig.3.7 である。ただし、横軸は t 、縦軸は磁場 B となっている。

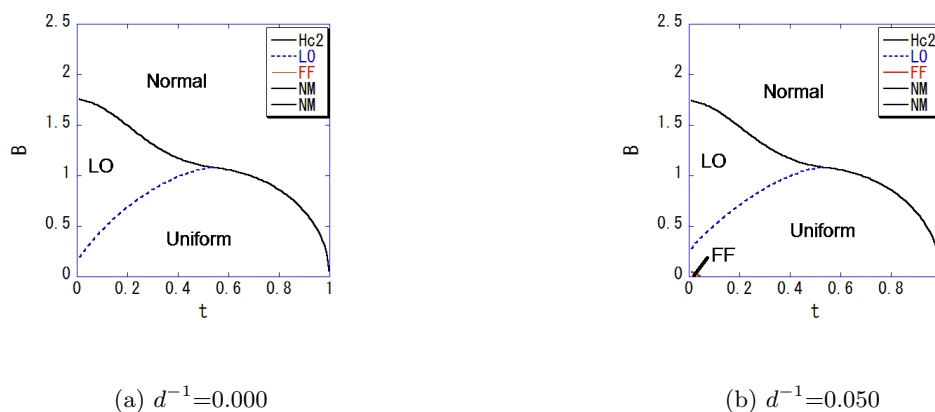


Fig. 3.7: "D_{xy} 波" の $d^{-1}=0.000$ & 0.050 に於ける t-B 相図

Bulk である $d^{-1} = 0.000$ (Fig.3.7(a)) では薄膜 FF 状態が出現していないが、 $d^{-1} = 0.050$ (Fig.3.7(b)) では既に低温低磁場域に薄膜 FF 状態が出現しており、膜厚が厚めの状態から薄膜 FF 状態に転移することが解る。

これは、t-d 相図 (Fig.3.5) に於いて、低磁場域での薄膜 FF 転移線が低温域では小さい d^{-1} にまで延びていることに起因している。 $B = 0.000$ の薄膜 FF 転移線 (赤実線) の $t = 0.03$ に於ける値は $d^{-1} = 0.038$ であり、 $D \sim 80\xi_0$ から $t = 0.03$ 以下で薄膜 FF 状態が観測できることになる。Vorontsov の計算結果 (Fig.1.11) でも、 $B = 0.000$ の薄膜 FF 転移線が $t \rightarrow 0$ で $d^{-1} \rightarrow 0$ となっており、絶対零度では Bulk でも薄膜 FF 状態が出現することになる。

逆に薄さの限界を調べると、低温域では超伝導転移線が $d^{-1} = 0.55$ 付近にあることから、 $D \sim 6\xi_0$ までは薄膜 FF 状態が存在しうることになる。

3.2.3 リエントラント超伝導相

膜厚の変化に依る相図の変化を確認する為の一連の相図が Fig.3.8 である。

Fig.3.8(a) を見ての通り、従来型 LO 領域と薄膜 FF 領域が連続していないことが判明した。また、膜厚を薄くすることで、超伝導領域中に常伝導領域が発生する様子が観測できる。

$d^{-1} = 0.511$ になると、常伝導領域が $t = 0.5$ & $B = 0$ 付近に初めて現れる。(Fig.3.8(b)) 膜厚が薄くなると常伝導領域が薄膜 FF 領域に接触し ($d^{-1} = 0.513$, Fig.3.8(c))、低温側に食い込んで行き ($d^{-1} = 0.517$, Fig.3.8(d))、y 軸に到達して超伝導領域を上下に分割する。($d^{-1} = 0.520$, Fig.3.8(e)) この時点では上側の薄膜 FF 領域は $t = 0.20 \sim 0.28$ の狭い範囲に以前として存在しているが、直ぐに常伝導領域に飲み込まれる。($d^{-1} = 0.522$, Fig.3.8(f)) さらに膜厚を薄くすることで常伝導領域は広がり、 $d^{-1} = 0.558$ で下側の薄膜 FF 領域が消滅する。($d^{-1} = 0.558$, Fig.3.8(g))

この常伝導領域の広がりとは関係なく、従来型 LO 領域は $d^{-1} = 0.595$ で消滅する。(Fig.3.8(h)) そして、 $d^{-1} = 0.723$ で超伝導領域が消滅する。

この常伝導領域の振る舞いは t-d グラフを用いて説明することができる。前述したように Fig.3.6 を見ると、 $t = 0.49$ 以上では磁場を強くすると超伝導転移線が下がり、 $t = 0.49$ 以下では超伝導転移線が上がる温度域が存在する。この $t = 0.49$ での超伝導転移線の交点が $d^{-1} = 0.510$ である。つまり、 $t = 0.49$ 直下では、低磁場での超伝導転移線が $d^{-1} = 0.511$ よりも下になり、常伝導状態となる。これが t-B グラフでは $d^{-1} = 0.511$ の $t = 0.5$ & $B = 0$ 付近に常伝導領域が初めて現れるという形で観測される。

また、低温領域では磁場を強くすると、超伝導転移線が一旦、下がった後、再び上がるという振る舞いをする。例えば、 $t = 0.01$ では $B = 0.500$ で超伝導転移線が一番下まで下がり、この時の膜厚が $d^{-1} = 0.519$ である。つまり、 $B = 0.500$ 付近では超伝導転移線が $d^{-1} = 0.520$ よりも下になり、常伝導状態となる。これが t-B グラフでは $d^{-1} = 0.520$ の時に初めて常伝導領域が y 軸に $B = 0.500$ で接触するという形で観測される。

Fig.3.9(a) は $d^{-1} = 0.517$ の時、 $t = 0.3$ で縦に切ったプロファイルである。

磁場を強くしていくと、 $B = 0.000$ で Δ が極大値を取り、 $B = 0.237$ で薄膜 FF 状態から常伝導状態に転移し、 $B = 0.333$ で常伝導状態から薄膜 FF 状態に再び転移する。その後、 $B = 0.375$ で薄膜 FF 状態から Uniform な超伝導状態に転移し、 $B = 0.945$ で Δ が最大値を取り、 $B = 1.309$ で Uniform な超伝導状態から常伝導状態に転移する。

各相転移時に Δ^2 及び q_x^2 が磁場に対して線形的に消滅することから、これらの相転移が2次転移であることが解る。Fig.3.9(b)を見ると、GL方程式の2次項の正負が入れ替わる、つまり常伝導転移する際に4次項が正であることから2次転移であることが確認できる。また、4次項は $B = 0.375$ で極小値を取るが、これは薄膜 FF 転移磁場に一致している。

Fig.3.9(c) は $d^{-1} = 0.517$ の時、 $B = 0.320$ で横に切ったプロファイルである。

温度を低くしていくと、 $t = 0.43$ で常伝導状態から Uniform な超伝導状態に転移し、 $t = 0.38$ で Δ が極大値を取り、 $t = 0.34$ で Uniform な超伝導状態から薄膜 FF 状態に転移する。その後、 $t = 0.33$ で薄膜 FF 状態から常伝導状態に転移し、 $t = 0.28$ で常伝導状態から薄膜 FF 状態に再び転移し、 $t = 0.01$ で Δ が最大値を取る。

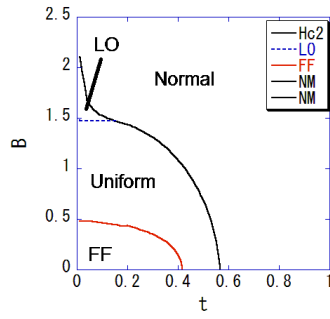
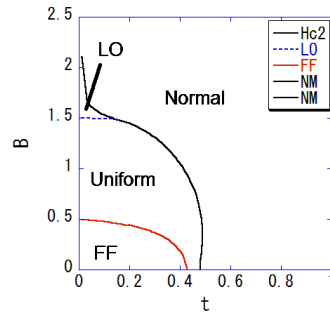
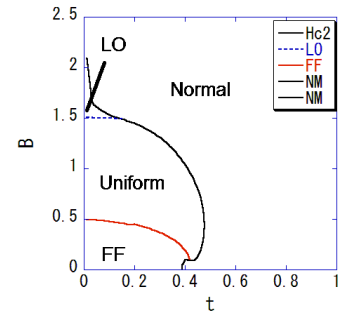
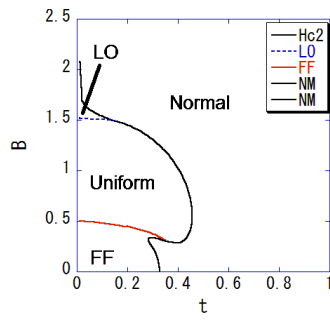
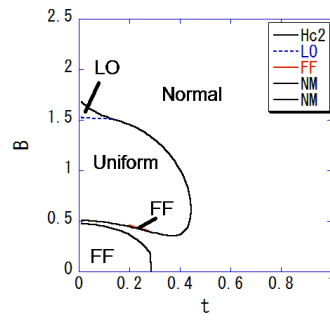
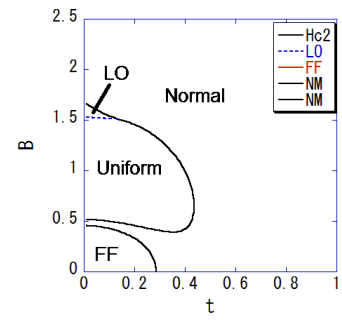
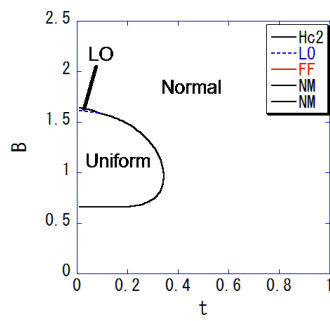
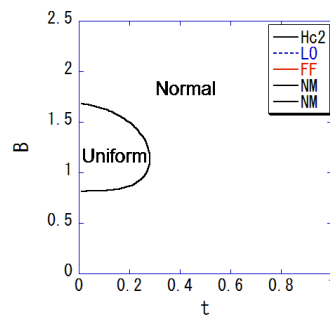
各相転移時に Δ^2 及び q_x^2 が温度に対して線形的に消滅することから、これらの相転移が2次転移であることが解る。Fig.3.9(d)を見ると、GL方程式の2次項の正負が入れ替わる、つまり常伝導転移する際に4次項が正であることから2次転移であることが確認できる。また、4次項は $t = 0.34$ で極小値を取るが、これは薄膜 FF 転移温度に一致している。

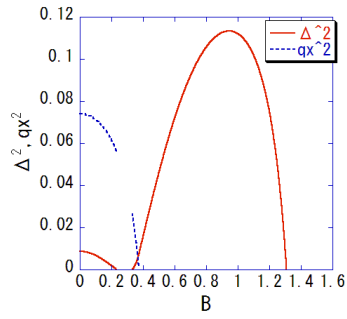
Fig.3.9(e)、Fig.3.9(f) は $B = 0.320$ の時の t - d 相図及びその拡大図である。これを見ると、リエントラント現象は超伝導転移線の温度変化に対する非一様な振る舞い（凹凸型の曲線）に起因していることが解る。

Fig.3.9(g) は $d^{-1} = 0.520$ の時、 $t = 0.1$ で縦に切ったプロファイルである。

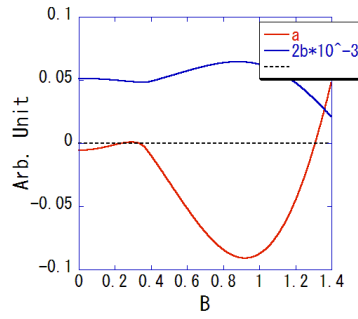
磁場を強くしていくと、 $B = 0.266$ で薄膜 FF 状態から常伝導状態に転移し、 $B = 0.489$ で常伝導状態から Uniform な超伝導状態に転移する。その後、 $B = 0.846$ で Δ が極大値を取り、 $B = 1.465$ で常伝導状態から従来の LO 状態に転移し、 $B = 1.542$ で従来の LO 状態から常伝導状態に転移する。

各相転移時に Δ^2 及び q_x^2 が磁場に対して線形的に消滅することから、これらの相転移が2次転移であることが解る。

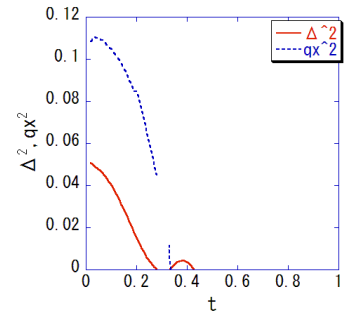
(a) $d^{-1}=0.500$ (b) $d^{-1}=0.511$ (c) $d^{-1}=0.513$ (d) $d^{-1}=0.517$ (e) $d^{-1}=0.520$ (f) $d^{-1}=0.522$ (g) $d^{-1}=0.558$ (h) $d^{-1}=0.595$ Fig. 3.8: "D_{xy} 波" の各膜厚に於ける t-B 相図



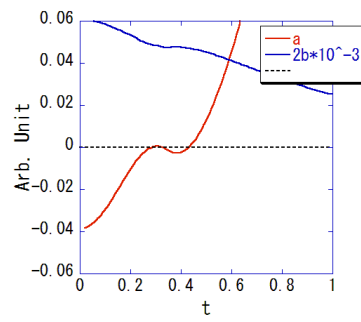
(a) プロファイル ($t = 0.30$)



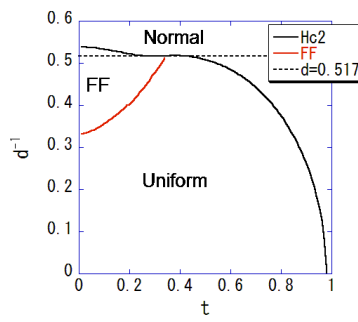
(b) GL 項 ($t = 0.30$)



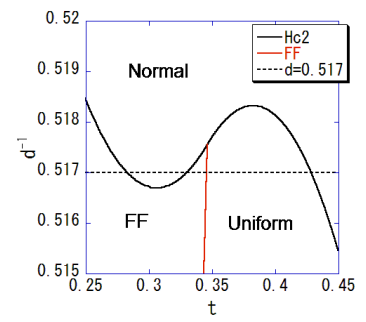
(c) プロファイル ($B = 0.320$)



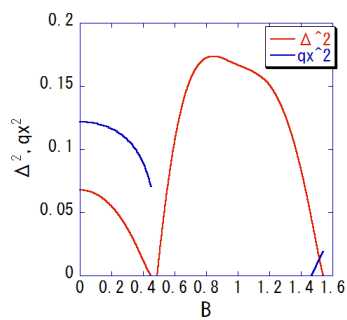
(d) GL 項 ($B = 0.320$)



(e) t-d 相図 ($B = 0.320$)



(f) Fig.3.9(e) の拡大図



(g) プロファイル ($t = 0.10$)

Fig. 3.9: "D_{xy} 波" $d=0.517$

第4章 結論

この章では前章での考察をまとめる。

4.1 薄膜 FFLO 状態

磁場を起源とする従来型 FFLO 状態の場合、LO 状態の方が安定である。しかし、サイズ効果を起源とする薄膜 FFLO 状態の場合、ゼロ磁場では薄膜 FF 状態の方が安定であることが確認されていた。従来型 FFLO 領域と薄膜 FFLO 領域は連続しているという仮定を基に、磁場をかけることで安定性の逆転が起きるのでは、という予測が存在したので、確認する研究を行った。

3.1 節で述べたように、GL 方程式に依る数値解析を行った結果、“ D_{xy} 波”の場合、磁場を加えることで薄膜 FF 状態から薄膜 LO 状態への安定性の逆転が確認された。しかし、薄膜 LO 転移線に不自然な急落が見られた。また、薄膜 FF 状態・薄膜 LO 状態ともに磁場を加えることで抑制され、その存在領域が薄膜側にシフトしていたため、bulk 側から現れるであろう従来型 LO 領域との接続に疑問が持たれた。

GL 方程式は近似式であり、低温高磁場下ではその精度に疑問が持たれることから、Eilenberger 方程式を用いて再解析を行うことにした。

3.2 節で述べたように、“ D_{xy} 波”の場合、磁場をかけても常に薄膜 FF 状態の方が安定であること、薄膜 FF 領域と従来型 LO 領域が接続していないことが確認された。また、転移は全て 2 次転移であることも確認された。

参考として他の pairing symmetry の場合でも同様の数値解析を行った。この結果、 P_y 波では“ D_{xy} 波”同様に常に薄膜 FF 状態の方が安定なことを確認した。また、“ $D_{x^2y^2}$ 波・ P_x 波・S 波”では薄膜 FFLO 状態が出現しないことを確認した。このことから、薄膜 FFLO 状態出現のメカニズムにはギャップノードの方向が密接に関係していることが解る。

4.2 磁場誘起リエントラント現象

3.2 節で述べたように、“ D_{xy} 波”の場合、磁場下で膜厚を薄くするにつれ、常伝導領域が薄膜 FF 領域に食い込んでいき、超伝導領域が $B = 0.5$ 付近で高磁場側と低磁場側に分割されることが確認された。例えば $d^{-1} = 0.517$ の場合 (Fig.3.8(d))、 $t = 0.3$ では磁場をゼロから強くしていく過程で、薄膜 FF 状態 常伝導状態 薄膜 FF 状態 Uniform 超伝導状態 常伝導状態、という Reentrant 現象が起きている。或いは $B = 0.320$ では温度を下げっていく過程で、常伝導状態 Uniform 超伝導状態 薄膜 FF 状態 常伝導状態 薄膜 FF 状態、というリエントラント現象が起きている。

この時の GL 項を確認すると、常伝導転移は 4 次項は正のまま 2 次項が負になることに起因しており、2 次転移だということが解る。また、modulation を調べると、常伝導領域によって薄膜 FF 領域が分断されているにも拘わらず、この間にも変移が大きくなり続けている様子が確認できる。このことから、磁場下の薄膜超伝導体内では Zeeman 効果に起因する Fermi surface の分裂による pair-breaking とサイズ効果に起因する変移による非等方的な pairing がせめぎ合っており、条件次第ではこのような磁場誘起リエントラント現象が発生するのだと推測される。

さらに膜厚を薄くしていくと、先に低磁場側の超伝導領域が消滅する。その後、残った超伝導領域は存在域を狭めながら低温高磁場側にシフトし、最終的に消滅する。

4.3 Assignments

FFLO 状態に於いては横磁化が周期的に現れることが判明している。[34] 横磁化は、自由エネルギー Eq.(2.223) とマクスウェル方程式を連立させて決めることができ、空間変調のない超伝導状態ではゼロであるが、秩序パラメタの周期構造があると一般に有限な値をとる。また実験的には中性子散乱実験を行うことで調べることができる。この横磁化の計算を行うことにより、本論文で取り扱った磁場誘起離縁リエントラント現象を実験的に確認する手段を提示できるだろう。

本論文では “ D_{xy} 波” を主に取り扱っており、他の pairing symmetry の場合の研究が不十分である。G 波やスピン三重項に対応させた P 波の場合の計算を行うことで、さらなる知見が得られると思われる。

前節で述べた様に磁場に対して非等方的な薄膜 FF 状態と、等方的な従来型 LO 状態が競合することで、磁場誘起リエントラント現象が発生した。このことから、磁場以外を起源とする他の FFLO 状態、例えばマルチバンド効果や電流を起源とする FFLO 状態に於いても、本論文と同様の磁場誘起リエントラント現象が発生する可能性があり、これらの場合の研究にも期待される。

謝辞

研究室編入を快く受け入れてくださった川上則雄先生に感謝します。D2の後期から、しかも実験系からの移籍であるにも拘わらず、受け入れてくださり、誠にありがとうございました。

指導教官としてテーマの選択や理論の基礎から導いてくださった池田隆介先生に感謝します。色々と至らない私を見捨てることなく、甚大なご協力をして頂き、誠にありがとうございました。入院の際や、急遽就職に進路を切り替えた際に変なご迷惑をおかけしたことを、この場を借りて謝罪させていただきます。無理をさせた私が言うのも何ですが、ご自愛下さい。

元指導教官として私の研究者の基礎を作ってくくださった松原明先生に感謝します。研究室移籍後にも新しい研究テーマのご相談に乗って頂き、ありがとうございました。結果的に松原先生の元を去ることになってしまいましたが、やり残した実験が上手くいくことを願っております。

研究室移籍の際に色々ご助言及びご助力をしてくださった太田隆夫先生、松田祐司先生、佐々木豊先生、上野智弘先生に感謝します。特に松田先生には就職活動に関しても色々ご助力頂き、誠にありがとうございました。松田先生の助力がなければ就職できなかったらと思います。

裏側で様々なご支援をいただいた事務室、秘書室の皆さんに感謝します。

凝縮系理論グループの方々に感謝します。私が幽霊学生だったため、情報伝達等で色々ご迷惑をおかけしたことをお詫びします。特に青山和司さんには研究に関して色々ご助言を頂き、ありがとうございました。青山さんのご助力がなければこの論文は完成していなかったと思われます。また、多田靖啓さんには研究にデータに対してのご考察をして頂き、ありがとうございました。多田さんの指摘によって新たな視点を得ることができました。

低温物理学研究室及びナノ量子物性研究室の皆さんに感謝します。特に新井敏一さんには研究室移籍後にもご相談に乗って頂き、ありがとうございました。新任地での御活躍をお祈りします。

NEC 熱チームの皆さんに感謝します。博論の準備で挫けそうになっている時に励まして頂き、ありがとうございました。

最後に立華奏さんに感謝します。D3 発表会の際には大変、お世話になりました。博士論文公聴会の際にもお世話になるだろうと思いますが、よろしくお願いします。

皆々様、本当にありがとうございました。

参考文献

- [1] P. Fulde and R. A. Ferrell *Phys. Rev.* **135** A550 (1964).
- [2] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov *Sov. Phys. JETP* **20** 762 (1965).
- [3] R. Ikeda *Phys. Rev. B* **81** 060510(R) (2010).
- [4] H. Shimahara and D. Rainer *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** 3591 (1997).
- [5] A. Bianchi et al. *Phys. Rev. Lett.* **89** 137002 (2002).
- [6] A. Bianchi et al. *Phys. Rev. Lett.* **91** 187004 (2003).
- [7] H. A. Radovan et al. *Nature* **425** 51 (2003).
- [8] K. Izawa et al. *Phys. Rev. Lett.* **87** 057002 (2001).
- [9] K. Kumagami et al. *Phys. Rev. Lett.* **97** 227002 (2016).
- [10] K. Kumagami et al. *Phys. Rev. Lett.* **106** 137004 (2011).
- [11] H. Adachi and R. Ikeda *Phys. Rev. B* **68** 184510 (2003).
- [12] J. Singleton et al. *J. Phys. Condens. Matter* **12** L641 (2000).
- [13] J. A. Symington et al. *Physica B* **294-295** 418 (2001).
- [14] R. Lortz et al. *Phys. Rev. Lett.* **99** 187002 (2007).
- [15] B. Bergk et al. *Phys. Rev. B* **83** 064506 (2011).
- [16] M. A. Tanatar et al. *Phys. Rev. B* **66** 134503 (2002).
- [17] S. Yonezawa et al. *Phys. Rev. Lett.* **100** 117002 (2008).
- [18] A. G. Lebed and S. Wu *Phys. Rev. B* **82** 172504 (2010).

- [19] I. J. Lee et al. *Phys. Rev. Lett.* **78** 3555 (1997).
- [20] T. Mizushima, K. Machida and M. Ichioka *Phys. Rev. Lett.* **95** 060404 (2005).
- [21] R. Casalbuoni and G. Narduli *Rev. Mod. Phys.* **76** 263 (2004).
- [22] R. P. Kaur, D. F. Agterberg and M. Sigrist *Phys. Rev. Lett.* **94** 137002 (2005).
- [23] N. Hiasa, T. Saiki and R. Ikeda *Phys. Rev. B* **80** 014501 (2009).
- [24] H. Doh, M. Song and H-Y. Kee *Phys. Rev. Lett.* **97** 257001 (2006).
- [25] A. B. Vorontsov *Phys. Rev. Lett.* **102** 177001 (2009).
- [26] K. Aoyama and R. Ikeda *JPS2009 autumn* 25pRK5 (2009).
- [27] G. Eilenberger *Z. Phys.* **190** 142 (1966).
- [28] G. Eilenberger *Z. Phys.* **214** 195 (1968).
- [29] N. Schopohl *J. Low Temp. Phys.* **41** 409 (1980).
- [30] N. Schopohl *Cond-Mat* 9804064 (1998).
- [31] A. B. Vorontsov, J. A. Sauls, and M. J. Graf *Phys. Rev. B* **72** 184501 (2005).
- [32] J. W. Serene and D. Rainer *Phys. Rev. Rep.* **101** 221 (1983).
- [33] A. B. Vorontsov and J. A. Sauls *Phys. Rev. B* **68** 064508 (2003).
- [34] M. Houzet and V. P. Mineev *Phys. Rev. B* **76** 224508 (2007).